

Projektguide - Faldbevægelse i luft

I dette fysik- og matematikprojekt skal vi undersøge bevægelsen af et legeme, som falder gennem luft.

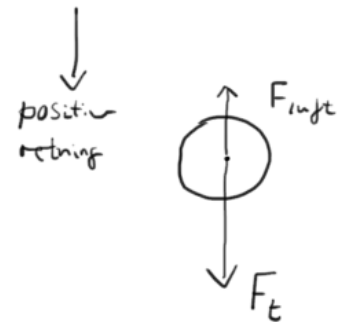
Formålet med projektet er at nå frem til formler for legemets hastighed og position som funktion af tiden.

Vi forudsætter, at legemet er påvirket af tyngdekraften og en modsat rettet luftmodstand, som er givet ved formlen

$$F_{luft} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \rho \cdot c_w \cdot v^2 = k \cdot v^2$$

Her har vi sat $k = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \rho \cdot c_w$

I bevægelsen regner vi positivt nedad, dvs. en nedadrettet hastighed er positiv.



Opgave 1

Forklar betydningen af A , ρ og c_w

Opgave 2

Opskriv et udtryk for den samlede kraft på legemet og vis, at det fører til denne differentialligning:

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = g - u \cdot v^2$$

Her er g tyngdeaccelerationen og $u = \frac{k}{m}$

Opgave 3

a) Begrund, at følgende dobbeltulighed gælder: $0 \leq v \leq \sqrt{\frac{g}{u}}$

b) Vis, at det fører til uligheden: $v \leq \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{A \cdot \rho \cdot c_w}}$

c) Hvilken fysisk betydning har $\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{A \cdot \rho \cdot c_w}}$

Opgave 4

Benyt separation af variable til at omskrive differentialligningen (1) til denne integralligning:

$$(2) \quad \int \frac{1}{g - u \cdot v^2} dv = \int 1 dt$$

Vi skal nu arbejde på at beregne integralet

$$\int \frac{1}{g - u \cdot v^2} dv$$

Opgave 5

Vis, at $\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{u}\cdot v} + \frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{u}\cdot v} \right) = \frac{1}{g-u\cdot v^2}$

Opgave 6

Vis, at

$$(3) \quad \int \frac{1}{g-u\cdot v^2} dv = \frac{1}{2\sqrt{g}\cdot u} \cdot \ln \ln \left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{u}\cdot v}{\sqrt{g}-\sqrt{u}\cdot v} \right) + k_1$$

Undervejs skal du argumentere for, at $\sqrt{g} - \sqrt{u} \cdot v > 0$. Overvej hvorfor det er nødvendigt. Ved bestemmelsen af stamfunktionerne til de to brøkdtryk kan du benytte substitution. En logaritmeregneregler bliver også nødvendig undervejs.

Opgave 7

Vis, at (2) sammen med (3) fører til

$$(4) \quad \frac{1}{2\sqrt{g}\cdot u} \cdot \ln \ln \left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{u}\cdot v}{\sqrt{g}-\sqrt{u}\cdot v} \right) = t + k_2$$

Begrund, at begyndelsesbetingelsen $v(0) = 0$ fører til $k_2 = 0$

Opgave 8

Vis, at (4) fører til

$$(5) \quad v(t) = \sqrt{\frac{g}{u}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{g}\cdot u\cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{g}\cdot u\cdot t} + 1}$$

Definition

Funktionen \tanh er defineret ved $\tanh \tanh (x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Funktionen \tanh kaldes "tangens hyperbolsk".

Opgave 9

Vis, at (5) giver dette udtryk for legemets hastighed som funktion af tiden:

$$(6) \quad v(t) = \sqrt{\frac{g}{u}} \cdot \tanh(\sqrt{g\cdot u} \cdot t)$$

Definition

Funktionen \cosh er defineret ved $\cosh \cosh (x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Funktionen \cosh kaldes "cosinus hyperbolsk".

Opgave 10

Bevis, at

$$(7) \quad \int \tanh \tanh (x) dx = \ln \ln (\cosh \cosh (x)) + c$$

Tip: benyt definitionen af \tanh og substitutionen $u = e^x + e^{-x}$. En logaritmeregneregler er også nødvendig.

Opgave 11

Vi skal nu udlede et udtryk for stedfunktionen. Benyt (6) og (7) til at udlede

$$(8) \quad s(t) = \frac{1}{u} \cdot \ln(\cosh \cosh (\sqrt{g \cdot u} \cdot t)) + s_0$$

Opgave 12

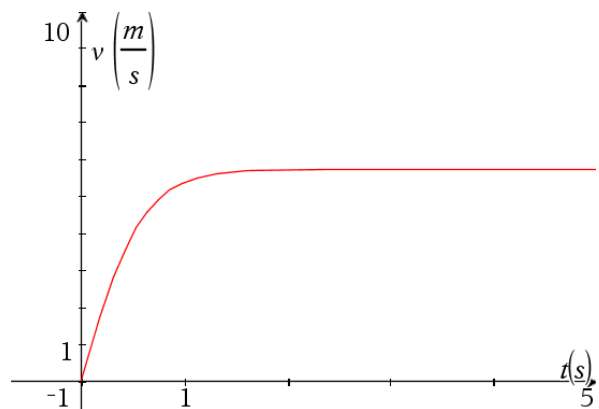
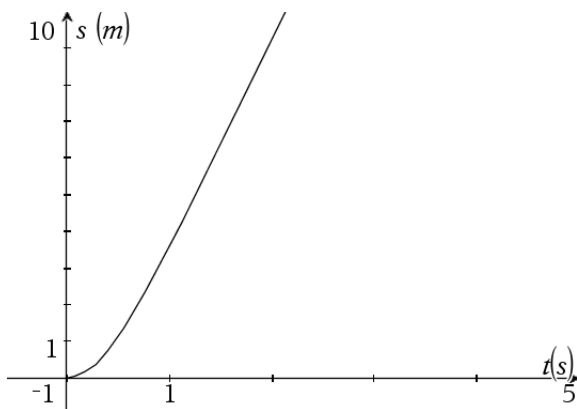
Benyt (6) og (8) samt definitionen på u til at udlede de fysiske formler, som beskriver bevægelsen af det faldende legeme:

$$(9) \quad v(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{A \cdot \rho \cdot c_w}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot A \cdot \rho \cdot c_w}{2 \cdot m}} \cdot t\right)$$

$$(10) \quad s(t) = \frac{2 \cdot m}{A \cdot \rho \cdot c_w} \cdot \ln(\cosh \cosh \left(\sqrt{\frac{g \cdot A \cdot \rho \cdot c_w}{2 \cdot m}} \cdot t\right)) + s_0$$

Opgave 13

Vælg realistiske værdier for de fysiske parametre og tegn grafer for strækning og hastighed. De skulle gerne se ud som i disse eksempler.



Eksperimentelle undersøgelser

Vælg nogle lette legemer og undersøg deres faldbevægelser. Benyt f.eks. papirkageforme (muffinforme), kaffefiltre, bordtennisbolde, balloner, faldskærme, eller papirkegler. Undersøg, om den opstillede model kan beskrive faldbevægelserne og bestem i bekræftende fald formfaktoren for de legemer, du undersøger.