



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET



Matematik Undervisningsvejledning

2019

Indhold

1	Om undervisningsvejledningen	3
<hr/>		
2	Matematik og folkeskolens formål	4
2.1	Relationen mellem fag og formål	4
<hr/>		
3	Om det faglige indhold i matematik	5
3.1	Om færdigheder, viden og kompetencer i matematik	5
3.2	De matematiske kompetencer	9
3.3	De matematiske stofområder	10
3.4	Om sammenhængen mellem de matematiske kompetencer og stof	19
3.5	Om progressionen i faget	20
<hr/>		
4	Tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering	25
4.1	Om at tilrettelægge matematikundervisning	25
4.2	Om at gennemføre matematikundervisning	25
4.3	Om evaluering i matematikundervisning	34
4.4	Om måls rolle i tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering	37
<hr/>		
5	Tværgående emner og problemstillinger	41
<hr/>		
6	Tværgående temaer	43
6.1	Sproglig udvikling	43
6.2	It og medier	45
6.3	Innovation og entreprenørskab	47
<hr/>		
7	Tilpasning af undervisning til elevernes forudsætninger	48
7.1	Undervisningsdifferentiering og mål i matematik	48
7.2	Undervisningsdifferentiering og aktiviteter i matematik	49
7.3	Undervisningsdifferentiering og organisering af matematikundervisning	50
7.4	Elever med særlige behov i matematik	51

1 Om undervisningsvejledningen

Undervisningsvejledningen giver information, støtte og inspiration til at kvalificere de mange valg, som læreren, i samarbejde med sin leder og sine kolleger, tager i sin praksis. Den informerer om de bestemmelser i folkeskoleloven og i Fælles Mål, som vedrører undervisningen i faget, og den støtter ved at forklare og eksemplificere centrale dele af fagets indhold.

Endelig giver undervisningsvejledningen inspiration til og understøtter tilrettelæggelse af undervisning i faget ved at beskrive forskellige mulige valg i planlægningen, gennemførelsen og evalueringen af undervisningen. I forbindelse med disse beskrivelser bidrager den til at synliggøre forskellige veje i tilrettelæggelsen af undervisningen, bl.a. ved at lægge op til diskussion af potentialer og begrænsninger i forskellige former for undervisningspraksis.

Hensigten med undervisningsvejledningen er at give information og inspiration til at kvalificere de mange valg, som matematiklæreren, i samarbejde med sine kolleger, tager i sin praksis.

- Informationen vedrører de bestemmelser, der er grundlaget for folkeskolens undervisning i matematik. Det er bl.a. information om, hvordan de matematiske kompetencer, stofområderne og sammenhænge mellem disse er tænkt i Fælles Mål for matematik.
- Inspirationen vedrører nogle af de overvejelser, som matematiklærere i folkeskolen må gøre sig i deres dagligdag. Det er bl.a. inspiration til tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering i matematikundervisning.

Et element i undervisningsvejledningen for matematik er oplæg til faglige drøftelser vedrørende matematik i folkeskolen. Oplæggene bygger bl.a. på konstruerede episoder fra undervisningssituationer. De er ment som inspiration til løbende drøftelser om fx matematiklærers rolle i undervisningen og om sammenhængen mellem den daglige undervisning i matematik og formålet med faget. De kan fx anvendes af et fagteam på en skole.

Undervisningsvejledningen er tænkt som et opslagsværk, og de enkelte afsnit kan læses uafhængigt af hinanden.

2 Matematik og folkeskolens formål

Dette kapitel er tænkt som inspiration til, hvordan matematikundervisningen kan bidrage til at fremme de overordnede idéer med folkeskolen, herunder elevernes alsidige udvikling. Kapitlet indledes med en beskrivelse af relationen mellem faget og skolens overordnede formål (afsnit 2.1).

2.1 Relationen mellem fag og formål

Det fremgår af læseplanens **kapitel 3**, at matematik som fag i folkeskolen bygger på den alsidige natur, matematik har som fag i samfundet generelt. I folkeskolen skal fagets forskellige aspekter imidlertid ses i forhold til det overordnede formål med skolen. Folkeskolens formål udgør med andre ord en horisont for de valg, matematiklæreren gør sig med hensyn til tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering i matematik.

Folkeskolens formål udtrykker i koncentreret form de værdier, vi som samfund har valgt, at skolen skal søge at føre videre. Betydningen af værdierne er imidlertid åben for flere mulige fortolkninger, og der foreligger ingen forskrifter for, hvordan en matematikundervisning, der baserer sig på disse værdier, ser ud. Det er med andre ord den enkelte matematiklærer, der, i samarbejde med kolleger og ledelse, til stadighed må overveje bl.a., hvordan eleverne bedst forberedes til videre uddannelse, og hvordan den enkelte elevs alsidige udvikling bedst fremmes inden for de rammer, som formålet og Fælles Mål giver.

I den forbindelse er det væsentligt at være opmærksom på, at folkeskolens formål på nogle områder rækker ud over elevernes udvikling af de færdigheder, den viden og de kompetencer, som Fælles Mål rammesætter. Opfyldelsen af kompetencemål er ikke ensbetydende med, at folkeskolens formål automatisk indfries. Fx er det ikke nødvendigvis sådan, at kompetencemålene udgør pejlemærker for, hvordan skolen "skaber rammer for oplevelse, fordybelse og virkelyst" og et virke, der er præget af "åndsfrihed, ligeværd og demokrati".

På tilsvarende vis er det ikke nødvendigvis de faglige mål for matematikundervisningen, der alene giver matematiklæreren pejlemærker for den enkelte elevs alsidige udvikling. Det er også matematiklærerens opgave, at den enkelte elev får mulighed for at udvikle sig alsidigt. Det kan bl.a. betyde, at eleverne udvikler deres samarbejdsevne, ansvarlighed, foretagelse, kreativitet, initiativ, engagement, særlige talenter og respekt for forskellighed. Det kan også betyde, at den enkelte elev udvikler sig emotionelt, intellektuelt, fysisk, socialt, etisk og æstetisk.

3 Om det faglige indhold i matematik

Dette kapitel indledes med en forklaring af begreberne færdighed, viden og kompetencer, som ligger bag Fælles Mål i matematik (afsnit 3.1). Derefter beskrives og eksemplificeres (i afsnit 3.2) de seks matematiske kompetencer og (i afsnit 3.3) de tre stofområder, som tilsammen udgør en ramme for Fælles Mål. I afsnit 3.4 gives inspiration til, hvordan lærere kan bruge denne ramme som grundlag for matematikundervisning. Kapitlet afsluttes (i afsnit 3.5) med information om den progressionstænkning, som ligger bag Fælles Mål, og med inspiration til, hvordan lærere kan tænke progression i matematikundervisningen.

3.1 Om færdigheder, viden og kompetencer i matematik

I Fælles Mål er færdigheder, viden og kompetencer centrale begreber. Dette afsnit beskriver og eksemplificerer betydningen af begreberne færdighed, viden og kompetencer i sammenhæng med matematikundervisning.

Baggrund

I forbindelse med folkeskolens matematikundervisning bliver begreberne "viden", "færdigheder" og "kompetencer" brugt på måder, der adskiller sig fra den danske kvalifikationsrammes beskrivelse af ordene. Der er derfor behov for at præcisere, hvad der menes med viden, færdigheder og kompetencer i sammenhæng med matematikundervisning. De følgende afsnit går tættere på betydningen af begreberne. Afsnittene inviterer også til en fortsat diskussion af, hvad der er relevant viden og relevante færdigheder og kompetencer i nutidens matematikundervisning..

Det matematiske kompetencebegreb

Det matematiske kompetencebegreb stammer fra rapporten "Kompetencer og matematiklæring (KOM-projektet)". Begrebet er udviklet som et redskab til at beskrive læseplaner for matematik. Traditionelt har læseplaner i matematik ofte alene bestået af beskrivelser af de begreber og metoder, som skulle være indholdet i undervisningen, men deltagerne i KOM-projektet fandt behov for at udvide denne type beskrivelser. De lagde vægt på, at matematikundervisning også går ud på at forstå, udøve, anvende og tage stilling til brug af matematik i forskellige sammenhænge. Det er de sider af matematikkunnen, som det matematiske kompetencebegreb søger at indfange. At være matematisk kompetent betyder, at man er i stand til at handle på en måde, som lever op til udfordringerne i en situation, der vedrører matematik.

Eksempler på spørgsmål, der lægger op til sådanne situationer:

- Hvilket abonnement skal jeg vælge til min mobiltelefon?
- Hvor mange trekanter med arealet 6 kan man lave på et sømbræt?
- Hvor mange mennesker bor der mon i Danmark om 50 år?

Forholdet mellem viden, færdigheder og kompetence

At have en matematisk færdighed kan forstås som at kunne gennemføre en bestemt matematisk procedure. Man kan fx bruge matematiske færdigheder til at:

- Beregne et gennemsnit
- Beregne 25 % af 300 kr.
- Tegne en ligesidet trekant.

Ud over færdigheder kræver de tre opgaver herover også kendskab til begreberne gennemsnit, procent og trekant. Dette kendskab kan betegnes som *viden*. Matematiske færdigheder kræver med andre ord viden. Denne viden kan stamme fra egne erfaringer eller fra et opslag i en formelsamling, og den kan i større eller mindre grad være forbundet med forståelse, men viden i et eller andet omfang er en forudsætning for matematisk færdighed. På den anden side er det også muligt at have viden, som ikke er forbundet med en færdighed. Elever kan fx vide, at der findes et tal, som kaldes pi, uden at kunne bruge denne viden til noget.

Læg også mærke til ligheden og forskellen mellem færdigheder og kompetencer. Begge dele er forbundet med handling, men i forbindelse med færdigheder er handlingerne entydige – de følger en bestemt opskrift. Man kan fx beregne gennemsnittet af tallene 1, 2, 3, 4, 5 ved at bruge en sådan opskrift. Først beregner man summen af de fem tal, og derefter dividerer man summen med antallet af tal. Matematiske kompetencer vedrører handlinger i situationer, hvor det ikke nødvendigvis er oplagt, hvad situationen kræver. Det betyder ikke, at den type handlinger, der udelukkende kræver en færdighed, nødvendigvis er lettere end den type handlinger, der kræver kompetence. Det kan fx være en matematisk færdighed at bruge en standardmetode til at løse en andengradsligning, og det kan være en matematisk kompetence at finde ud af, hvor mange gæster der kan være plads til ved en fødselsdagsfest. Det afgørende er, at den første situation kræver en bestemt, given handling, mens den sidstnævnte situation er flertydig. Det er ikke givet på forhånd, *hvordan* man skal finde ud af, hvor mange gæster der kan være plads til.

Til overvejelse i fagteamet

- Prøv at komme i tanke om andre situationer, der kræver matematisk kompetence.
- Giv eksempler på forskellige matematiske færdigheder.
- Hvilke færdigheder er det særligt vigtigt, at nutidens elever lærer? Hvilke færdigheder er mindre vigtige? Hvorfor?
- Hvilken matematisk viden er det særlig vigtigt, at nutidens elever lærer? Hvilken viden er mindre vigtig? Hvorfor?
- Hvordan ser I forholdet mellem færdigheder, viden og kompetencer?

Et eksempel

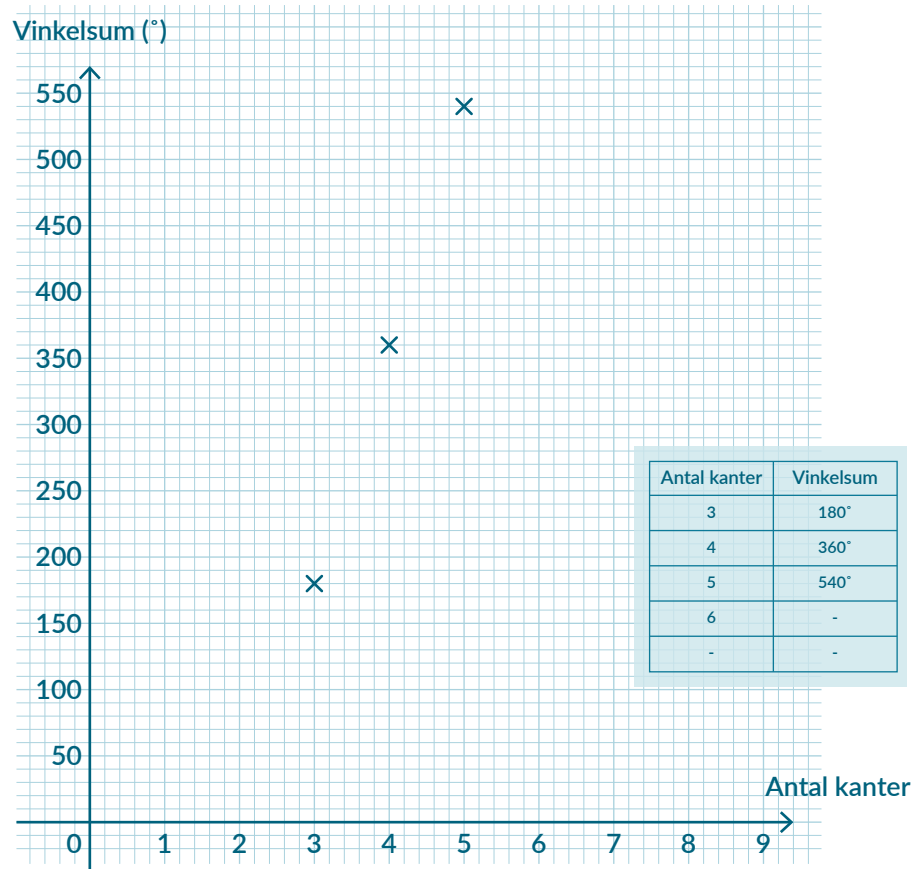
Her er en opgave, der fx kan være stillet i 6. klasse:

Undersøg, om der er en sammenhæng mellem antallet af sider i polygoner og polygonernes vinkelsum.

For at kunne handle i denne situation, dvs. løse opgaven, må eleverne have viden om begreberne "polygon" og "vinkel", og de må vide, hvad der menes med fagordet "vinkelsum".

De må også have færdigheder i at tegne polygoner, i at måle deres vinkler og i at bestemme hver polygons vinkelsum. Som opgaven er beskrevet her, er det overladt til eleverne, *hvordan* de vil finde ud af, om der er en sammenhæng. I den forbindelse vil det nok være en fordel, hvis de har viden om forskellige måder at gribe situationen an på. Fx kan det være en idé at prøve sig frem ved at tegne nogle eksempler på polygoner, at måle deres vinkler og at regne vinkelsummen ud. For mange vil det i situationen nok være en fordel at have færdighed i at tegne polygoner i et geometriprogram, der kan måle vinkler præcist. Nogle vil måske have fordel af at kende til brug af funktionstabeller og måske også til at tegne sammenhængen mellem antal sider og vinkelsum som en punktgraf i et koordinatsystem.

Figur 1: Sammenhæng mellem antal sider og vinkelsum som punktgraf i et koordinatsystem



Pointen er, at matematisk kompetence omfatter viden og færdigheder. For at kunne handle kompetent må eleverne oven i købet kunne udvælge viden og færdigheder, der er relevante i situationen, eftersom det ikke er givet på forhånd, hvilke handlinger situationen kræver.

De fleste mennesker oplever en stor forskel mellem at være i en "færdighedssituation", hvor det er givet, hvad der kræves af dem, og at være i en "kompetencesituation", hvor det ikke er givet. At være kompetent betyder også, at man kan bære at være i den sidstnævnte type situationer, hvor mange i perioder oplever en fastlåshed. Hvilken fremgangsmåde skal jeg vælge? Hvordan kan jeg overhovedet komme videre? Vejen til løsning af kompetenceopgaver kan være kringlet, og den er præget af valg. Er det nu bedst at gøre det ene eller

det andet? Fører den vej, jeg har givet mig ud på, i det hele taget i den rigtige retning? At være kompetent betyder derfor også at kunne se sin arbejdsproces lidt fra oven. Det kan være godt at stoppe op en gang i mellem og overveje, om man er på rette spor, eller om det vil være bedre at sadle om.

Til overvejelse i fagteamet

- Hvilke erfaringer har I med elever, der er i "kompetencesituationer"?
- Hvordan agerer eleverne i kompetencesituationer?
- Hvordan agerer eleverne i færdighedssituationer?

Kompetenceorienteret matematikundervisning

Matematikundervisning, der bevidst er rettet imod, at elever får mulighed for at udvikle matematiske kompetencer, betegnes i nogle sammenhænge som kompetenceorienteret matematikundervisning. Det er matematikundervisning, som sigter på, at eleverne "rækker ud over" de færdigheder og den viden, som de kan bruge rutinemæssigt – typisk ved at undersøge eller udforske situationer, hvori der indgår matematik, eller hvor matematik kan bidrage. I sådanne situationer må eleverne reflektere over, hvilken viden og hvilke færdigheder de kan trække på. De må med andre ord overveje, hvad deres kunnen kan bruges til, og situationen er på den måde bl.a. en mulighed for, at eleverne udvikler overblik over og højere grad af forståelse for begreber og metoder. Eleverne får desuden mulighed for at udvikle erfaringer med selve det at begå sig i situationen – at kunne være vedholdende og at foretage valg, der kan bringe dem videre.

For læreren stiller denne form for matematikundervisning bl.a. krav til den måde, hun støtter eleverne på, når de arbejder med en bestemt problemstilling. På den ene side må hun stilladsere deres læring, men samtidig må hun fastholde orienteringen mod kompetencer. Det betyder, at stilladseringen fx ikke kan gå ud på at fortælle eleverne, *hvordan* de kan løse et bestemt problem ved at bruge nogle bestemte metoder, men i højere grad må gå ud på at støtte elevernes refleksioner over problemstillingen.

Til overvejelse i fagteamet

- Forestil jer, at I skal støtte elever i 6. klasse, der arbejder med at finde en sammenhæng mellem antallet af sider i polygoner og polygonernes vinkelsum. Hvad kan støtte gå ud på, hvis kompetenceorienteringen skal holdes? Hvordan får I kompetencer i spil i jeres egen undervisning?

Yderligere læsning: 3.1 Om færdigheder, viden og kompetencer side 52

3.2 De matematiske kompetencer

Seks forskellige matematiske kompetencer

I Fælles Mål er matematisk kompetencebesiddelse beskrevet med seks forskellige matematiske kompetencer. I de følgende afsnit beskrives og eksemplificeres hver af de seks kompetencer.

Problembehandling

Problembehandling vedrører opstilling og løsning af matematiske problemer, dvs. matematiske spørgsmål, der ikke kan besvares udelukkende med rutinemetoder.

At løse et matematisk problem kræver en matematisk undersøgelse.

Eksempel (7.-9. klassetrin): *Hvor store er vinklerne i en regulær trekant? Firkant? n-kant?*

Modellering

Modellering vedrører processer, hvor matematik anvendes til behandling af situationer og problemer fra omverdenen, og det vedrører analyse og vurdering af matematiske modeller, som beskriver forhold i omverdenen.

Eksempel (4.-6. klassetrin): *Hvor mange børn er der plads til i vores gymnastiksal?*

Ræsonnement og tankegang

Ræsonnement og tankegang vedrører matematisk argumentation og karakteristika ved matematisk tankegang.

Eksempel (4.-6. klassetrin): *Ole påstår, at summen af to ulige tal bliver et lige tal. Har han ret? Hvorfor eller hvorfor ikke?*

Repræsentation og symbolbehandling

Repræsentation og symbolbehandling vedrører anvendelse og forståelse af repræsentationer i matematik, herunder matematisk symbolsprog.

Eksempel (1.-3. klassetrin): *Fortæl to forskellige regnehistorier, der passer til $24 - 5$.*

Kommunikation

Kommunikation vedrører det at udtrykke sig med og om matematik og at sætte sig ind i og fortolke andres udtryk med og om matematik.

Eksempel (1.-3. klassetrin): *Skriv eller tegn, hvordan du tænkte, da du skulle finde ud af, om I kunne dele klodserne i 4 lige store bunker.*

Hjælpe midler

Hjælpe midler vedrører kendskab til, anvendelse og valg af relevante hjælpemidler i matematik.

Eksempel (7.-9. klassetrin): *Giv eksempler på situationer, hvor det er en fordel at bruge a) en lommeregner b) et CAS-program c) hovedregning.*

Til overvejelse i fagteamet

- Giv eksempler på andre oplæg, der retter sig mod hver af de matematiske kompetencer.

Yderligere læsning: 3.2 De matematiske kompetencer side 52

3.3 De matematiske stofområder

Dette afsnit er tænkt som inspiration til undervisningen inden for hvert af de tre stofområder, Tal og algebra, Geometri og måling samt Statistik og sandsynlighed. Afsnittet giver eksempler på oplæg og undervisningssituationer.

Tal og algebra

Omdrejningspunktet for arbejdet med tal og algebra i indskolingen er elevernes udvikling af metoder til beregninger med naturlige tal. Sidst i trinforløbet inddrages dog også enkle brøker og decimaltal fra hverdagsituationer. På mellemtrinnet udvides talområdet til at omfatte rationale tal, og der fokuseres bl.a. på variabelbegrebet i tilknytning til ligninger, formler og beskrivelse af sammenhænge. Sidst i skoleforløbet omfatter talområdet også irrationale tal, og arbejdet med algebra omfatter også funktioner. Eleverne skal blive i stand til at anvende de reelle tal og algebraiske udtryk i både praktiske og teoretiske sammenhænge.

Brudstykker af talarbejdet på de yngste klassetrin

Elevernes udvikling af metoder til antalsbestemmelse på de yngste klassetrin finder sted i en undervisning, hvor deres færdigheder og viden inden for de tre områder tal, regnestrategier og algebra får mulighed for at spille sammen. Dette afsnit skal illustrere et sådant samspil.

I 1. klasse kan undervisning med hovedfokus på regnestrategier bl.a. bygge på problemstillinger (regnehistorier), som læreren formulerer mundtligt.

Eksempel: *Albert har 7 kroner. Han får 10 kroner mere. Hvor mange penge har han nu?*

Nogle elever i en 1. klasse klarer denne opgave ved at bruge tællematerialer, fx centicubes, til at repræsentere 1 krone. De tæller 7 centicubes op og lægger dem i en bunke. Derefter tæller de 10 centicubes op i en anden bunke, hvorefter de tæller alle centicubes. Denne strategi, hvor eleverne bruger tællematerialer til at repræsentere de ting, de tæller, kaldes i nogle sammenhænge direkte modellering og er samtidig et eksempel på en tæl-alle-strategi.

Andre elever i klassen bruger direkte modellering sammen med en tæl-videre-strategi. De er kommet et skridt videre i deres faglige udvikling og tæller videre fra 7, fordi de enten på egen hånd eller med støtte har opdaget, at de ikke behøver at tælle tingene i den første mængde. Et typisk næste skridt er, at eleverne tæller videre fra den største addend – altså i dette eksempel fra 10. Det forudsætter, at eleverne har indset, at addendernes orden er ligegyldig.

I eksemplerne udvikler eleverne gradvist færdigheder og viden om addition på grundlag af tællestrategier (i modsætning til udenadslære). Efterhånden kan eleverne i kraft af den viden, de opbygger igennem undervisningen, inddrage faktaviden i deres regnestrategier. Det kan fx tænkes, at en elev løser opgaven i eksemplet med hovedregning ved at tænke: Jeg ved, at 10 plus 5 er 15. Så skal jeg bare tage 2 mere. Det bliver 17. Eleven bruger en regnestrategi, der bygger på udledte talfakta.

Senere i indskolingsforløbet kan problemstillingen udvides, så den i højere grad sigter på algebraisk tænkning:

Albert har 7 kroner. Hver uge får han 10 kroner mere. Efter 1 uge har han 17 kroner. Hvor mange penge har han efter 2 uger, 3 uger, ...?

Eleverne kan ved hjælp af deres forskellige regnestrategier og evt. lærerens støtte udarbejde lister, der viser Alberts opsparing, fx 7, 17, 27, 37, 47, ...

Læreren spørger, hvordan det mon fortsætter, og lægger på den måde op til, at eleverne leder efter et mønster i talfølgen.

Et svar kunne være: Det bagerste tal bliver ved med at være 7, men det forreste tal bliver hele tiden større ... 1, 2, 3, 4, ...

Læreren griber chancen til at introducere en tabel, der viser antal uger og antal kroner:

Eksempel på opsætning af tabel til problemløsning

Uger	1	2	3	4	5	6
Kroner	17	27	37	47		

Hvor mange penge har Albert mon så efter 5 uger? 6 uger?

Eleverne får på den måde dels mulighed for at opdage nogle generelle træk ved regneoperationen $+10$, dels får de mulighed for at opdage endnu en sammenhæng, nemlig sammenhængen mellem antal uger og antal kroner.

Endnu senere i indskolingsforløbet kan det tænkes, at indsigten vedrørende regneoperationen $+10$ indgår i elevernes udvikling af metoder til addition med flercifrede tal. For nogle elever kan beregningen af $48 + 34$ foregå ved optællingen: 48, 58, 68, 78, 79, 80, 81, 82, når de støtter sig til tællemateriale, tallinje eller taltavle. Andre elever trækker på en anden indsigt, de har udviklet igennem undervisningen, nemlig at tallene kan opdeles i tiere og enere. Deres forklaring kan evt. lyde sådan: Der er 4 + 3 tiere. Det er 7 tiere. Og der er 8 + 4 enere. Det er 12 enere. Så er der $70 + 12 = 82$. Endelig kan det tænkes, at nogle elever benytter sig af strategien omgruppering: $48 + 34$. Hvis jeg lægger 2 til 48, får jeg 50. Så kan jeg trække 2 fra 34. Så får jeg 32. $48 + 34$ må give det samme som $50 + 32$. Det bliver 82.

Det er hensigten, at eleverne på de yngste klassetrin får mulighed for gradvist at udvikle og forfine deres foreløbige og intuitive talforståelser og regnestrategier. Læreren spiller i den forbindelse en stor rolle med løbende at understøtte både de enkelte elevers læring og klassens fælles læringsspor, bl.a. ved at fremhæve metoder og forståelser, der bygger på indsigt i titalssystemet og i egenskaber ved de naturlige tal.

Brudstykker af arbejdet med algebra på mellemtrinnet og i udskolingen

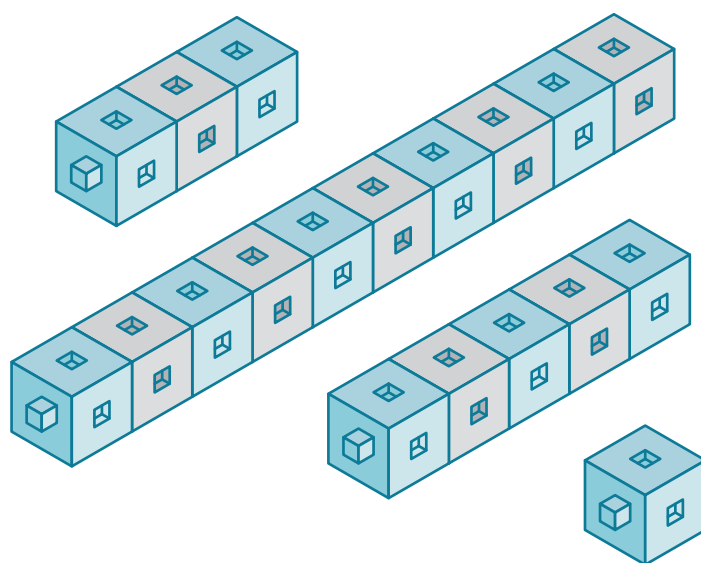
Algebra kan forstås som fagligt stof, der har det tilfælles, at bogstaver kan optræde som pladsholdere for tal. Det gælder fx i ligninger, formler og funktioner. Algebra kan også forstås som en bestemt type aktiviteter. I denne forståelse er algebra handlinger, som kræver bestemte former for tænkning. Disse former for tænkning kan omtales som algebraisk tænkning.

En vigtig form for algebraisk tænkning er generalisering. Elever kan allerede fra de yngste klassetrin arbejde med at opdage, repræsentere og begrunde sammenhænge mellem og egenskaber ved tal, kvantiteter og regningsarter. Denne form for algebraisk tænkning kan fortsætte som en tråd igennem hele skoleforløbet.

Eksempel: *Centicubestænger*

En lærer i 6. klasse introducerer følgende opgave fælles i klassen: *Byg en centicubestang af 5 centicubes. Prøv så at tælle, hvor mange sideflader, der er på centicubestangen.* En sideflade skal i denne sammenhæng forstås som en sideflade på en centicube – også selv om siderne har "tapper" eller "huller". I begyndelsen har eleverne i klassen brug for at afklare, hvad læreren mener, men efter kort tid bliver de enige om, at centicubestangen har 22 sideflader.

Figur 2: Centicubestænger



Læreren udvider nu problemet: *Hvad hvis stangen var bygget af 6 centicubes? Eller 10? I skal undersøge, hvilken sammenhæng der er mellem antal centicubes og antal sideflader.* Eleverne går i gang med arbejdet i små grupper. De fleste prøver sig frem ved at bygge og tælle. Nogle begynder at notere deres resultater ned. Efter et stykke tid stopper læreren arbejdet. Han siger: *Jeg vil give jer en idé til, hvordan I kan notere jeres resultater.* Han tegner en tabel på tavlen med to kolonner på tavlen. I den ene kolonne er overskriften "Antal centicubes". I den anden kolonne er overskriften "Antal sideflader". Klassen taler om, hvordan de efterhånden kan udfylde tabellen med tal, og arbejder derefter videre. Efter endnu et stykke tid stopper læreren igen arbejdet: *Jeg har lagt mærke til, at nogle af jer er begyndt at skyde genvej, når I skal finde ud af, hvor mange sideflader der er i en stang. I tæller ikke længere dem alle sammen. Det ser ud som om, at I regner på forskellige måder. Vil I prøve at fortælle, hvordan I gør?* En elev forklarer, at hun bruger 4-tabellen. *Der er 4 sideflader på hver centicube. Så kan jeg bare tælle 4, 8, 12, 16, osv. Mens hun tæller, peger hun på en centicube ad gangen. Bagefter lægger jeg de to sideflader i bunden til.* En anden elev forklarer: *Jeg tæller en side på centicube. Altså, 1, 2, 3, 4, 5. Mens han tæller, peger han på en centicube ad gangen. Så ganger jeg det antal, jeg får, med 4, og til sidst lægger jeg 2 til - en fra hver ende af stangen.* Klassen taler om disse genveje. Nogle elever vil gerne have dem vist en gang til, og andre elever vil gerne have forklaret det med at lægge 2 til. Læreren spørger, om disse genveje altid kan bruges.

Efter et stykke tid samler læreren op på klassens arbejde. I fællesskab udfylder de en tabel på tavlen.

Eksempel på opstilling af sammenhængen mellem antal centicubes og antal sideflader

Antal centicubes	Antal sideflader
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22
6	26

Læreren spørger til de opdagelser, eleverne har gjort. *Kan I se en sammenhæng mellem antal centicubes og antal sideflader?* Det første, eleverne bemærker, er "de lodrette" sammenhænge. *Den venstre side af skemaet er 1-tabellen... Den højre side af tabellen er på en måde 4-tabellen... det er de tal, der ligger lige imellem tallene i 4-tabellen... Når antallet af centicubes vokser med 1, så vokser antallet af sideflader med 4.* Læreren beder på den baggrund eleverne om at forudsige, hvor mange sideflader der vil være i en stang med 10 centicubes. Han spørger også, om det kan tænkes, at der findes en stang med 40 sideflader. *Hvorfor? Hvorfor ikke? Hvad med 42? Hvor mange centicubes vil der være i sådan en stang?* Derefter spørger han til den vandrette sammenhæng. *Er der nogle af jer, der kan se en sammenhæng mellem disse tal?* Han peger på talparrene 1 og 6, 2 og 10 osv. Han beder eleverne huske tilbage på, hvordan de skød genvej til at finde antallet af sideflader. *Vi gangede med 4 og lagde 2 til,* siger en elev, og læreren gentager. Sammen kan klassen nu efterprøve denne regneregul. $4 \cdot 4 + 2 = 18$. $5 \cdot 4 + 2 = 22$. Læreren skriver flere eksempler på tavlen. Klassen er enige om, at reglen ser ud til at virke hver gang. *Så hvad skulle jeg gøre, hvis jeg kendte antallet af centicubes i en stang og ville finde antallet af sideflader? Du skulle gange antallet med 4 og lægge 2 til,* siger en elev.

Klassen har i eksemplet allerede opdaget og repræsenteret en generel sammenhæng. Der er tale om en generalisering, fordi sammenhængen gælder for en mængde af tal (de naturlige tal) – og ikke kun for et konkret eksempel. Repræsentationen er foreløbig formuleret i naturligt sprog af en elev. Arbejdet kan danne grundlag for, at læreren introducerer idéen om at skrive den generelle sammenhæng ved hjælp af et udtryk, hvor bogstaver repræsenterer tal, der kan variere inden for en mængde – altså variable. Sammenhængen kan fx skrives som $a = c \cdot 4 + 2$, hvor a er antal sideflader, og c er antal centicubes. Arbejdet kan også danne grundlag for, at eleverne begrundet den generelle sammenhæng. Begrundelsen kan støttes af de genveje, som eleverne tidligere har fortalt om i de konkrete eksempler. Det er fx altid sådan, at hver centicube vil have 4 flader, og at der desuden vil være 2 sideflader, som skal adderes. Set fra et stofmæssigt perspektiv kan eksemplet ses for et arbejde med funktioner. Der er en funktionel sammenhæng mellem antallet af centicubes og antallet af sideflader.

Geometri og måling

På de yngste klassetrin fokuseres på, at eleverne udvikler deres forestillinger og viden om former, størrelser og beliggenhed sådan, at de gradvist bliver bedre til at anvende geometriske begreber og til at måle længder samt areal. Arbejdet tager udgangspunkt i elevernes erfaringsverden. På mellemtrinnet kan undervisningen gradvist tage udgangspunkt længere væk fra elevernes nære verden, når fokus rettes på deres anvendelse af geometriske metoder til fx tegning og angivelse af placering samt beregninger af enkle mål vedrørende længder, areal og rumfang. I undervisningen på overbygningen lægges gradvist mere vægt på undersøgelser og forklaringer på geometriske sammenhænge samt på metoder til beregninger af mål.

Brudstykker fra den indledende undervisning i geometri og måling

Det er et grundlæggende træk, at geometrien tager udgangspunkt i elevernes forestillinger om og beskrivelse af den omgivende verden. Herved kan arbejdet med geometrien – på samme måde som arbejdet med tallene – tage udgangspunkt i elevernes hverdags-erfaringer.

I de første år arbejdes der med fysiske objekter, som gøres til genstand for manipulation, iagttagelse og drøftelse. Erfaringerne med de geometriske former og figurers størrelse kan med fordel underbygges ved at lade eleverne bygge rumlige modeller og lave figurer på et sømbræt eller i et dynamisk geometriprogram på computeren. Det kan være figurer, der ligner et eller andet, eller det kan være figurer, som skal opfylde bestemte betingelser: Kan du lave en firkant, som er dobbelt så stor som denne her? Herved kan eleverne opdage, at "dobbelt så stor" kan have flere betydninger: Dobbelt så lange sider eller dobbelt så stor en flade. Det er lærerens opgave at give eleverne mulighed for at opdage og indse sådanne forskelle. Herved kan eleverne indse behovet for at udtrykke sig mere præcist.

Eksempler på aktiviteter i første forløb kan være:

- Tegn den rute, du går til skole ad.
- Byg en model af dit værelse.
- Tegn det hus, du bor i.
- Find mønstre i dine omgivelser, og tegn et af dem.

I dialogen kan indgå spørgsmål som:

- Hvad fortæller din tegning?
- Kan du se på tegningen, hvor langt du har til skole?
- Hvordan kan du finde ud af, hvor langt der er i virkeligheden?
- Vinduet i dit værelse er firkantet. Er der andre firkantede ting på værelset?
- Hvilke andre former har tingene på dit værelse?
- Kan du gøre din tegning dobbelt så stor?

Geometrien rummer mange muligheder for problemløsning og ræsonnementer. Udgangspunkterne kan fx være spørgsmål som:

- Hvor mange forskellige trekanter kan du lave på et 3 x 3 sømbræt?
Hvor mange firkanter?
- Hvor mange forskellige figurer kan du bygge med 3, 4 eller 5 centicubes?
- Kan du bygge en figur, der vejer dobbelt så meget som ...?
Kan figuren være en kasse?

Udvikling af metoder til beregning af areal

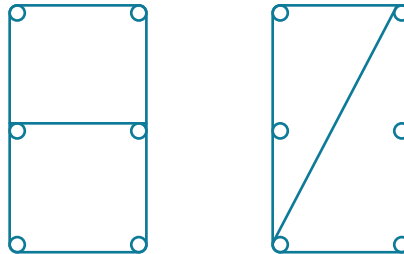
Området er præget af formler. Der er mange, og de kan slås op, men det er afgørende for elevernes forståelse af, hvad formler betyder, at de kommer igennem nogle fundamentale erkendelsesprocesser.

Det begynder hos de yngste elever:

Ved at lægge to helt ens trekanter ved siden af hinanden kan man altid få en firkant. Ved at lægge kvadratiske brikker på en rektangulær flade, som kan dækkes helt af brikkerne, kan man finde et tal, der beskriver størrelsen af fladen. Det skal prøves mange gange og mødes

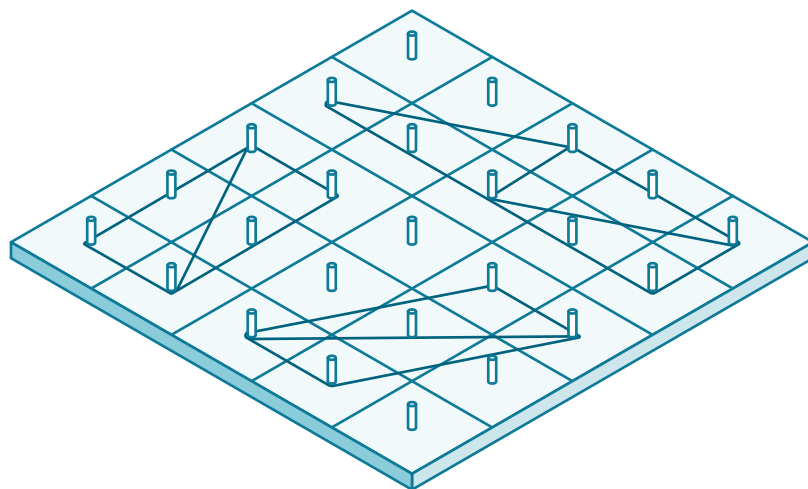
i mange sammenhænge. Eleverne opdager, at rektangler er figurer, der direkte kan måles (med kvadrat som måleenhed), og at antallet af arealenheder kan bestemmes ved multiplikation. De fleste andre figurers størrelsesbeskrivelse kan kun forstås ved ræsonnementer.

Figur 3: Arealberegning ved brug af rektangler



I dette tilfælde kan eleven se, at den venstre figur er 2 stor, fordi den består af to arealenheder. Trekantens størrelse på den anden figur kan gennem ræsonnement indsæes at være 1. Enten fordi den er halvdelen af 2, eller fordi trekanten deles op, og delene flyttes rundt, så der dannes et kvadrat, som er 1. Nogle elever kan meget tidligt foretage denne tænkning og sætte ord på.

Figur 4: Figurer på et sømbræt



På tegningen herover er vist en række figurer på sømbræt. Figurerne illustrerer elevernes mulighed for at udvikle metoder til størrelsesbeskrivelse af plane figurer:

- Retvinklede trekanter er altid halvdelen af et rektangel.
- Parallelogrammer kan altid omdannes til rektangler med samme areal.
- Enhver trekant er halvdelen af et parallelogram.

I løbet af 4.-6. klasse kan eleverne udvikle metoder, der bygger på erkendelse og indsigt, så de på et senere tidspunkt, hvor det lærte er glemt, vil kunne gendanne den viden, som engang blev erhvervet. I processen med denne størrelsesbeskrivelse er det afgørende, at eleverne selv udvikler et sprog, som fortæller om deres egne konklusioner. Ved at sætte elevernes forskellige sproglige udtryk op mod hinanden gives der mulighed for at drøfte mere præcise formuleringer, som udelukker misforståelser.

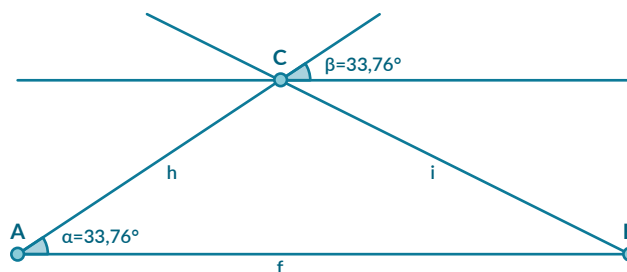
For ældre elever, hvor konkretiseringen ofte tones lidt ned, er der fortsat et behov for at skabe indlevelse i de grundlæggende begreber. Det er vanskeligt at forestille sig, at eleverne kan udvikle et størrelsesbegreb knyttet til rumlige figurer uden at have været igennem fysiske målinger, som kan danne grundlag for beregninger – helt på samme måde som ved arbejdet med arealbegrebet.

Dynamiske geometriprogrammer og dynamiske virtuelle materialer

I dag findes en række dynamiske geometriprogrammer, som gratis kan hentes på internettet. En stor del af det traditionelle arbejde med at konstruere fx trekanter med givne egenskaber vil naturligt foregå på computeren. Ligesom lommeregner og computer har fjernet behovet for træning af standardalgoritmer i forbindelse med arbejdet med tal og algebra, ændrer anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer i forbindelse med arbejdet med geometri også behovet for at udvikle tegnetekniker på papir. Samtidig kan et dynamisk geometriprogram åbne for nye læringsmuligheder, fx nye muligheder for at understøtte elevernes geometriske ræsonnementer.

Et dynamisk geometriprogram kan fx på de ældste klassetrin give mulighed for at koble visualiseringer af vinkler ved parallelle linjer med teoretiske forklaringer.

Figur 5: Visualisering af vinkler ved parallelle linjer



Hvis figuren herover konstrueres i et dynamisk geometriprogram, giver den fx eleverne mulighed for at se, at enslydende vinkler forbliver lige store, når de trækker i trekantens hjørner. Noget tilsvarende gælder for topvinkler. Kan de bruge denne erkendelse til at forklare, hvorfor vinkelsummen i en trekant altid er 180 grader? Konstruktionen kan give eleverne mulighed for at støtte deres ræsonnementer til visualiseringen.

Statistik og sandsynlighed

Arbejdet med statistik og sandsynlighed skal ses i en tæt sammenhæng. I starten af skoleforløbet arbejdes der med enkel deskriptiv statistik, samtidig med at eleverne gør sig grundlæggende erfaringer med chancebegrebet ud fra intuitive overvejelser og systematiske observationer af stokastiske eksperimenter, fx i forbindelse med spil. På mellemtrinnet arbejder eleverne med at gennemføre og præsentere statistiske undersøgelser samt analysere og tolke resultater af undersøgelser fra fx medierne og internettet.

Sideløbende arbejdes der med statistiske undersøgelser af chanceeksperimenter ved simulering, og eleverne knytter beregning af frekvenser til sandsynlighedsbegrebet. I udskolingen arbejder eleverne videre med anvendelser af statistik – både ved at gennemføre egne undersøgelser og ved at analysere og tolke præsentationer af resultater af statistiske undersøgelser. Det teoretiske sandsynlighedsbegreb introduceres ud fra erfaringer med det statistiske sandsynlighedsbegreb samt overvejelser over udfaldsrum og tælle måder, og eleverne arbejder bl.a. med sammensatte sandsynligheder. I statistik anvendes overvejelser om sandsynligheder til at analysere og vurdere stikprøveundersøgelser.

Brudstykker af arbejdet med statistik

I de yngre klasser starter arbejdet med statistik omkring indsamling af data, der vedrører eleverne selv, fx alder, højde, skostørrelser, antal søskende, antal kæledyr og fritidsinteresser, og deres nærmeste omgivelser som skolevejens længde, boligtype mv.

I 2. klasse kan eleverne fx tælle biler og andre trafikanter på forskellige tidspunkter. Eleverne ordner data i tabeller og enkle diagrammer, evt. med hjælp af en computer. I hverdagsprog formulerer eleverne, hvad man kan se af de bearbejdede data:

- Hvilke typer trafikanter er der flest af?
- Hvornår er der flest trafikanter på gaden?
- Er der forskel på, hvornår der er flest biler, og hvornår der er flest fodgængere?

Eleverne kan også bruge indsamlede data over en længere periode til at beskrive en udvikling, fx ved at de måler deres egen højde to gange årligt gennem flere år. Lignende dataindsamling kan indgå i tværfaglige forløb, fx egne idrætspræstationer over tid.

Eleverne skal også arbejde med at læse andres statistiske fremstillinger. I 6. klasse kan undervisningen fx tage udgangspunkt i et diagram fra en avis, der beskriver 12-åriges medieforbrug. Selve forståelsen af diagrammet sammenlignet med avisartiklens beskrivelse af samme har medført diskussioner i klassen. Eleverne beslutter at gennemføre en undersøgelse af medieforbruget i alle skolens 6. klasser. De udarbejder et spørgeskema, som også medtager forhold, der ikke var med i avisens undersøgelse. De indsamlede data bearbejdes i et regneark. Fremlægning indebærer en sammenligning med avisens udlægning og sammenligninger mellem piger og drenge, klasserne indbyrdes osv.

I forbindelse med projektopgaven i 9. klasse gennemfører nogle eleverne spørgeskemaundersøgelser. Det er derfor oplagt i matematikundervisningen at give eleverne mulighed for at arbejde med udarbejdelsen af spørgsmål, vurdering af deres kvalitet og validitet, optællingsmetoder og bearbejdning i et regneark eller et statistikprogram. Udgangspunktet for at vurdere andre statistiske overvejelser vil ofte være avisernes og andre mediers anvendelse af statistik i form af tabeller og diagrammer.

Brudstykker af arbejdet med sandsynlighed

I arbejdet med sandsynlighed sigtes der mod, at eleverne opnår indsigt i forskellige måder, sandsynligheder beregnes på:

- Som en frekvensanalyse af indsamlede data. Dette anvendes bl.a. i nogle risikovurderinger.
- Som udfald, der opfattes som ligevægtede. Dette anvendes fx i forbindelse med terningspil.

Et eksempel på en populær aktivitet i 2. klasse er dyreløb på baner nummereret 2 – 12. Hver bane skal gennemløbes af et dyr. På bane 2 løber fx geparden, på bane 5 koen, på bane 7 sneglen, på bane 11 elefanten osv. Eleverne spiller vinderspil med skolepenge. På skift slår eleverne med to terninger, og summen af øjnene bestemmer, på hvilken bane der rykkes et felt frem. Der kan spilles flere gange, dyrene kan skifte bane, og dyrene kan skiftes ud med transportmidler af forskellig art. Legen følges op med en dialog om, hvorfor det ser ud til, at banerne 6, 7, eller 8 næsten altid vinder.

- Gad vide, hvilke terningekast der kan give 5, 12, 2?
- Hvad nu, hvis terningerne er to forskellige farver – ændrer det chancerne?
- Hvad nu, hvis I prøver igen – bliver det de samme dyr, der vinder?
- Hvordan går det, hvis I laver rigtig mange kast?
- Hvad nu, hvis det er differensen, der bestemmer banenummeret?

Forløbet kan på mellemtrinnet følges op med en egentlig undersøgelse af kast med to terninger med en efterfølgende statistisk bearbejdning.

- Hvis alle i klassen har slået 50 gange, hvilken sum er så hyppigst?
- Hvordan forholder det sig, hvis alle har slået 200 gange?
- Hvordan ser det ud, når vi har ladet fx et regneark simulere tusindvis af slag?

I overbygningen kan dyreløbet følges op med at opbygge en simpel matematisk model over spilchancerne ud fra en formodning om, at terningernes udfald opfattes som ligevægtede. Eleverne analyserer og udregner sandsynligheder for forskellige chancer for at vinde i dyreløbet.

Sandsynlighed anvendes imidlertid i mange andre sammenhænge ud over i forbindelse med spil. Det er vigtigt, at eleverne – specielt i den sidste del af skoleforløbet – stifter bekendtskab med disse anvendelsesmuligheder, som er væsentlige i mange forskellige sammenhænge i det omgivende samfund. Det kan fx være forsikrings spørgsmål, vejrprognoser, opinionsundersøgelser, risikovurderinger i forbindelse med brug af nye teknologier eller chancer for helbredelse i forhold til risiko for bivirkninger ved brug af medicin.

I undervisningen i de ældre klasser indgår således behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed i mange forskellige sammenhænge. Det kan fx dreje sig om:

- Stikprøveundersøgelser
- Lodtrækning
- Forsikring
- Vejrdata
- Chancespil
- Ekspertvurderinger
- Odds.

3.4 Om sammenhængen mellem de matematiske kompetencer og stof

Som det fremgår af læseplanens kapitel 3, er det hensigten med Fælles Mål, at matematikundervisning finder sted i et samspil mellem de matematiske kompetencer og stofområderne. I de følgende episoder giver lærere eksempler på, hvordan de i konkrete undervisningsforløb har tænkt sammenhængen mellem de matematiske kompetencer og stof.

Episode 1

Min 9. klasse skal i den kommende periode arbejde med et forløb, som primært fokuserer på ræsonnement og tankegang. Der indgår selvfølgelig også matematisk stof i forløbet. Jeg forestiller mig, at eleverne kan komme til at arbejde med både tal, algebra og geometri undervejs, men jeg vil først og fremmest fokusere på, at eleverne kommer til at udvikle og vurdere matematiske ræsonnementer.

Jeg tænker omdrejningspunktet i forløbet som "påstande og argumenter". Matematik er – på en måde – fyldt med påstande, fx om, at vinkelsummen i en trekant er 180 grader, vinkelsummen i en n -kant er $180 \cdot (n-2)$, og summen af de første n naturlige tal er $n(n+1)/2$ osv. Matematikere prøver at finde argumenter for, at matematiske påstande – eller hypoteser – er sande eller falske. Hvis det lykkes for dem at overbevise "matematiksamfundet" om, at en påstand er sand – altså at bevise den – så har de lavet en matematisk sætning. Jeg vil have, at mine elever oplever en snert af denne proces og får blik for, hvordan matematik kan udvikles mellem mennesker. De skal prøve at møde nogle påstande og argumenter, som andre er kommet med, og de skal selv prøve at opdage matematiske sammenhænge, som kan føre til, at de kommer med påstande og argumenter. Det giver mig mulighed for at undervise i, hvad der skal til, for at et matematisk argument er holdbart.

Jeg har planlagt, at eleverne bl.a. skal arbejde med påstande om geometri, fx at en nabovinkel til en vinkel i en trekant har samme størrelse som summen af trekantens to andre vinkler. Jeg tror også, at mange af dem kan opdage, at nabovinklerne til enhver trekants tre vinkler tilsammen er 360 grader – og at de med støtte vil kunne bevise dette. De skal også møde nogle matematiske beviser, som andre har formuleret. Fx nogle forskellige beviser for, at summen af de første n tal er $n(n+1)/2$. I dette forløb vil jeg ikke vælge indhold, der sigter efter, at eleverne skal lære noget bestemt matematisk stof, men mere efter, om indholdet kan hjælpe dem til at udvikle ræsonnement og tankegangskompetence. Det er på den måde kompetencen, som bliver styrende for mit valg.

Episode 2

I begyndelsen af deres skoleforløb arbejdede min 1. klasse med et forløb, hvor vi havde fokus på tal, tællemåder og opdelinger af tal. Eleverne skulle blandt andet undersøge, på hvor mange forskellige måder de kunne opdele 10 børn i to forskellige grupper, de skulle lave "talbilleder" med muslingskaller, vi har samlet på en strandtur, og skrive de tilhørende talsymboler. De skulle også lave forskellige lege, hvor de fik brug for tælleremser som 2, 4, 6, ... 5, 10, 15, 20... og 10, 20, 30, 40, ...

Det var færdigheds- og vidensområdet "Tal", der var vores pejlemærke. I det forløb fokuserede vi mindre på de matematiske kompetencer. Set i bakspejlet synes jeg, at eleverne kom til at arbejde med mange af de matematiske kompetencer. Fx blev det problembehandling for mange elever, da de skulle finde alle de måder, de kunne opdele de 10 børn i, og da de skulle lave talbilleder og skrive tallene, havde det jo også at gøre med repræsentation og symbol. Forskellen var bare, at det var mål inden for stofområdet tal og algebra, der "førte an", og at det derfor først og fremmest var dette stofområde, vi kom i dybden med. Hvis jeg mest havde fokuseret på fx problembehandling, ville jeg i højere grad have valgt opgaver, der fik dem til at gruble, og så ville jeg have talt specielt med dem om det med at få hul på den slags opgaver og om at få gode idéer til at komme videre med dem.

3.5 Om progressionen i faget

I læseplanen for matematik er den overordnede progression i faget beskrevet som to bevægelser. I forbindelse med de matematiske kompetencer går bevægelsen fra nære, velkendte og enkle situationer mod fjernere, mindre velkendte og mere komplekse situationer. I forbindelse med de matematiske stofområder går bevægelsen fra det uformelle og konkrete, mod det mere formelle og generelle. Den førstnævnte type progression strækker sig igennem hele skoleforløbet, mens den sidstnævnte type progression i højere grad er knyttet til de enkelte matematiske begreber og metoder, som eleverne arbejder med. Man kan derfor godt forestille sig elever på de yngste klassetrin, der i løbet af et forløb, om fx udvikling af metoder til at beregne areal, bevæger sig fra det uformelle og konkrete mod det mere formelle og generelle. På tilsvarende vis kan man forestille sig elever på de ældste klassetrin, der i løbet af et forløb, om fx udvikling af metoder til at løse ligninger, bevæger sig fra det uformelle og konkrete mod det mere formelle og generelle.

Det er væsentligt at bemærke, at progression i faget *ikke* er tænkt som en taksonomi, hvor lave niveauer af kunnen, som fx "at kunne beskrive" hører til de yngste klasser, og høje niveauer af kunnen som fx "at kunne vurdere" hører til de ældste klasser. Tanken er, at den enkelte elev skal have mulighed for at kunne arbejde med passende niveauer af kunnen igennem hele skoleforløbet.

Det er også væsentligt at bemærke, at progressionen i faget her kun er beskrevet overordnet og på en måde, så ikke alle nuancer fanges ind. Igennem skoleforløbet er det bl.a. også hensigten, at eleverne gradvist får flere og flere aspekter af hver af de matematiske kompetencer med i deres matematiske beredskab. Det kan fx betyde, at eleverne kommer til at kunne praktisere matematisk modellering med flere og flere elementer i deres modelleringsprocesser. Det er også hensigten, at eleverne i slutningen af skoleforløbet er i stand til at handle i situationer, som, matematisk set, er teknisk vanskeligere end i begyndelsen af skoleforløbet. Fx er det hensigten, at eleverne i slutningen af skoleforløbet kan løse matematiske problemer, der kræver sammensatte beregninger med alle fire regningsarter, hvilket man ikke kan forvente i begyndelsen af skoleforløbet.

Læseplanen støtter de nævnte former for progression på en sådan måde, at når læseplanen følges, vil eleverne også gradvist komme til at arbejde med flere og flere aspekter af kompetencerne, og det matematiske stof vil gradvist blive teknisk vanskeligere. Det er imidlertid i lidt højere grad op til læreren, hvordan han eller hun vil undervise på en måde, som understøtter progressionen mod gradvist mere komplekse situationer og mod gradvist mere formelle og generelle begreber og metoder.

De følgende to episoder giver eksempler på, hvordan disse bevægelser kan se ud i konkrete undervisningsforløb.

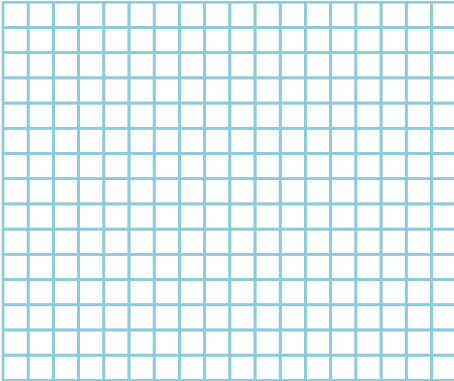
Episode 1

Mine elever i 4. klasse har igennem flere uger arbejdet med at udvikle metoder til multiplikation med tal, der er større end 10. Eleverne har tidligere arbejdet med multiplikation, og de har bl.a. mødt en arealmodel. Det var denne model, forløbet tog udgangspunkt i. Den første opgave gik ud på at finde ud af, hvor mange kvadrater der er i figuren herunder. Først talte vi i klassen om, at figuren viser gangestykket $15 \cdot 18$. Hvis eleverne kunne finde det samlede antal kvadrater, ville de kunne løse dette store gangestykke.

Figur 6: Eksempel på opgave med multiplikation

Gange 2 **Arbejdsside 1**

Hvor mange kvadrater?
Del firkanten op i mindre stykker og regn.



Skriv her:

Eleverne arbejder på mange forskellige måder. Nogle brugte mest tællemetoder. De talte fx halvdelen af kvadraterne og fordoblede det antal, de nåede frem til. Andre fandt på lidt mere effektive genveje. Der var fx nogle, der fandt ud af, at der er 30 kvadrater i to kolonner. $30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30$ giver derfor det rigtige resultat. Så var der nogle, der delte figuren op i stykker á 10. De kunne så tælle sig frem til det rigtige resultat med tælleremsen 10, 20, 30, ... Som afslutning på dette modul lod jeg nogle elever fortælle om deres metoder, så andre elever kunne lade sig inspirere.

I det næste modul gav jeg dem endnu en opgave med en arealmodel. Denne gang var det $21 \cdot 14$. Vi talte om, at eleverne skulle gå på jagt efter nogle opdelinger af rektanglet, som ville gøre det lettere for dem at regne stykket. Igen brugte de mange forskellige metoder, men særligt en form for opdeling fremhævede jeg i den efterfølgende opsamling. En af eleverne havde delt stykket sådan:

Figur 7: Eksempel på elevs opdeling af kvadrater

Gange 3 Arbejdsside 1

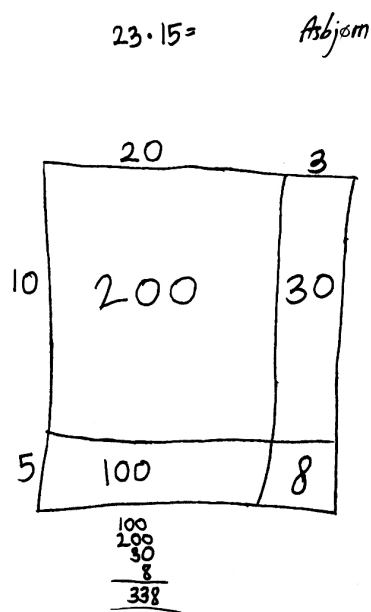
Hvor mange kvadrater?
Del op på en måde, der gør opgaven lettere.

The diagram shows a 20x20 grid. A vertical dashed line runs down the center, dividing the grid into two 10x20 halves. Two horizontal dashed lines run across the grid, one at the 10th row and one at the 19th row. This division creates four 10x10 quadrants. The top-left and bottom-left quadrants are labeled '100'. The top-right and bottom-right quadrants are labeled '40'. The bottom-left quadrant is further divided into a 5x2 area labeled '10' and a 5x2 area labeled '4'.

Han havde udnyttet, at det gør beregningerne betydeligt lettere, hvis de to cifrede tal deles op i 10'ere og 1'ere. Eleverne havde tidligere opdaget en regel for at gange med 10. Denne regel kan de jo bruge, når de deler stykket op som her.

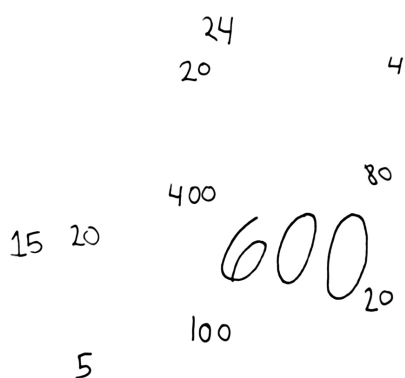
I de følgende moduler var det især denne metode, som blev efterlignet af de andre elever. Det blev gradvist til en fælles gangemåde i klassen. Når jeg stillede dem et gangestykke, kunne de tegne en arealmodel på ternet papir og regne stykket ved at opdele det. På et tidspunkt spurgte jeg, hvad de ville gøre, hvis de fik et blankt stykke papir i stedet for et ternet stykke. Så begyndte der at dukke besvarelser op som denne:

Figur 8: Eksempel på elevbesvarelse



Man kan næsten fornemme, at eleverne stadig tænker i ternene. Ternene er i deres hoved, men ikke i modellen. Efterhånden som forløbet skred frem, sagde jeg, at når de ikke længere havde behov for det, så kunne de jo lade være med at tegne rektanglet. I en overgang kunne der dukke besvarelser op som den herunder, hvor $25 \cdot 24$ er regnet af en elev, der nok stadig har arealmodellen i hovedet.

Figur 9: Eksempel på elevbesvarelse



Efterhånden – på forskellige tidspunkter – slap eleverne dog tilsyneladende arealmodellen helt, og den typiske metode kom til at se sådan ud:

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 18 \\ \hline 100 \\ 50 \\ 80 \\ 40 \\ \hline 270 \end{array}$$

For mig er forløbet et eksempel på, hvordan eleverne i samarbejde og med støtte fra en lærer kan udvikle metoder til multiplikation. Det er samtidig et eksempel på, hvordan elever i 4. klasse igennem et undervisningsforløb kan bevæge sig i en progression fra det konkrete og uformelle mod det mere generelle og formelle. I begyndelsen af forløbet var elevernes metoder helt forbundet med den kontekst, som arealmodellerne udgør, og deres metoder til at finde antallet af kvadrater var forskellige fra stykke til stykke. Desuden var deres metoder uformelle i den betydning, at de ikke lignede standardiserede metoder til multiplikation. Sidst i forløbet var deres metoder mere generaliserede. De kunne bruge dem på tværs af mange forskellige kontekster. De var også mere formelle i den betydning, at de byggede på den distributive lov for multiplikation. Metoden udnytter jo bl.a., at fx $15 \cdot 18 = (10 + 5) \cdot (10 + 8) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 8$, og - generelt set - at $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$, for alle reelle tal, a, b, c og d.

Episode 2

Når jeg ser flere år tilbage på de af mine undervisningsforløb, der har været rettet mod modelleringskompetence, viser de en progression fra nære, velkendte og enkle situationer mod fjernere, mindre velkendte og mere komplekse situationer. På de yngste klassetrin kunne mine elever fx arbejde med modellering ved at finde smarte tælle-måder, som de kunne bruge i klassen og på skolen. I 3. klasse skulle de fx finde ud af, hvor mange bøger der er på vores skolebibliotek. På den måde blev de tvunget til at finde på nogle genveje, som gjorde, at de kunne finde antallet uden at tælle dem alle. De blev med andre ord nødt til at udvikle en model, som de tænkte, var holdbar til formålet.

På mellemtrinnet skulle de bl.a. finde ud af, hvor mange mennesker der ville kunne være til en koncert i vores skolegård. Efter min opfattelse er det en mere kompleks situation, fordi den involverer flere beslutninger og flere forskellige matematiske metoder og begreber. Hvor meget plads skal der fx være til hver person? Hvor meget plads skal der afsættes til scene og gang-arealer? Hvordan kan man regne sig frem til et passende antal? På mellemtrinnet kunne eleverne fx også arbejde med lidt fjernere situationer. Fx: Hvad koster en tur i tivoli? Hvor mange gange slår et hjerte på et liv?

På de ældste klassetrin rækker situationerne mere ud i verden, og de er mere komplekse. Det kan fx handle om: Hvor mange børn vil gå i danske skoler om 50 år? Hvor meget CO₂ udleder en familie på en ferie? Hvor langt fremme skal der være frit på vejen, hvis man skal kunne overhale sikkert i bil?

4 Tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering

Dette kapitel er tænkt som inspiration til matematiklærerens arbejde med tilrettelæggelse (afsnit 4.1), gennemførelse (afsnit 4.2) og evaluering (afsnit 4.3) i matematikundervisning. Kapitlet præsenterer forskellige læreres didaktiske overvejelser og lægger op til, at fagteamet diskuterer disse overvejelser i tilknytning til egen praksis. Mål i undervisningen spiller en rolle i forbindelse med både tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering. Kapitlet afsluttes med inspiration til, hvordan matematiklæreren kan bruge mål i praksis (afsnit 4.4).

4.1 Om at tilrettelægge matematikundervisning

Ordet "tilrettelæggelse" bruges i denne sammenhæng om alle de af lærerens valg, der ligger før en undervisning. Tilrettelæggelse kan derfor både være langsigtet (fx i tilknytning til udarbejdelsen af en årsplan og et undervisningsforløb) og kortsigtet (fx i tilknytning til de valg, der ligger umiddelbart før en lektion).

Folkeskoleloven stiller en række krav til undervisningens tilrettelæggelse. Kravene vedrører valg af indhold, undervisnings- og arbejdsformer, metoder og undervisningsmidler. Lærers valg på disse områder skal både leve op til formål, mål og til den enkelte elevs behov og forudsætninger. Undervisningen skal tilrettelægges, så det giver eleverne mulighed for faglig fordybelse, overblik og oplevelse af sammenhænge. Desuden skal tilrettelæggelsen baseres på løbende evaluering af elevens udbytte af undervisningen.

4.2 Om at gennemføre matematikundervisning

Hvis man sammenligner ældre og nyere danske faghæfter for matematik, er det tydeligt, at intentionerne med undervisningen har forandret sig gennem årene. En bevægelse kan fx spores igennem de følgende to citater, der begge er hentet fra fagets formål.

Fra 1960, s. 74, vores fremhævnings:

"At **opøve og anvende de færdigheder i regning**, som eleverne får brug for i livet uden for skolen, i familie, samfund og erhverv."

Fra 2014, vores fremhævnings:

"Eleverne skal i faget matematik **udvikle matematiske kompetencer** og opnå færdigheder og viden, således at de kan begå sig hensigtsmæssigt i matematikrelaterede situationer i deres aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv."

De to citater signalerer en bevægelse fra at "opøve og anvende færdigheder" til at "udvikle matematiske kompetencer". Som det fremgår af denne vejlednings afsnit 3, er "matematiske kompetencer" et mere ambitiøst begreb end "færdigheder", for kompetencebesiddelse rækker ud over færdigheder og viden. Kompetencebesiddelse kræver også, at elever skal være i stand til at forstå, udvælge og foretage handlinger med færdigheder i situationer, som kan være præget af kompleksitet.

Samtidig signalerer de to citater en bevægelse i forestillingen om, hvordan matematikundervisning skal foregå. Bevægelsen går fra at "opøve" til at "udvikle". I fagformålet fra 2014 er det tydeligt, at der forventes mere, end at eleven øver færdigheder. Eleven skal være aktiv i sin læreproces. Således fremgår det af fagformålets stk. 2, at "Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation".

Matematikundervisning stiller med andre ord nogle andre typer af krav til matematiklæreren, end det har gjort tidligere. Det drejer sig bl.a. om krav til, at undervisningen i højere grad end tidligere:

- Er rettet mod forståelse.
- Omfatter undersøgende arbejde.
- Foregår igennem samtale.

Dette afsnit er ment som inspiration til, hvad disse tre punkter kan betyde i praksis.

At lære matematik med forståelse

Generelt er det hensigten, at elever i den danske folkeskole skal lære matematik med forståelse. Det betyder grundlæggende, at eleverne ikke bare skal have kendskab til de metoder, der indgår i Fælles Mål for matematik, men også skal have indsigt i det faglige indhold i dem. De skal vide, *hvorfor* metoderne virker, og hvornår og hvordan de kan anvendes. Men hvad kan denne ambition betyde for undervisning i matematik?

Overordnet set betyder ambitionen om at undervise for forståelse, at eleverne skal have mulighed for at finde og konstruere sammenhænge mellem de forskellige begreber og metoder, der indgår i undervisningen. Når eleverne arbejder med udvikling af metoder til flercifret addition, skal de fx have mulighed for at bygge videre på de forståelser, de i forvejen har af begrebet addition og af flercifrede tal (fx at addition kan svare til sammenlægning af to bunker centicubes, og at flercifrede tal kan opdeles i 10'ere og 1'ere). Hvis eleverne skal lære matematik med forståelse, er det med andre ord afgørende, at begreber og metoder ikke fremstår som "isolerede øer", der ikke har noget særligt med hinanden at gøre. Ambitionen er, at eleverne så vidt muligt ser, hvordan nye indsigter kan bygge videre på indsigter, de allerede har udviklet, og udvikles, så eleverne så får en oplevelse af sammenhænge, der efterhånden kan udvides til et overblik over matematik som fagområde (jf. folkeskolelovens §5).

Denne ambition betyder, at læreren konstant må være opmærksom på og lydhør over for elevernes aktuelle forståelser, samtidig med, at hun er bevidst om, hvilken retning hun gerne vil prøve at "skubbe" disse forståelser i. Lidt mere præciseret betyder det, at læreren på samme tid må rette sin opmærksomhed på tre ting: På eleven som lærende person, på de faglige forståelser, hun gerne vil have, at eleven udvikler, men måske først og fremmest på elevens arbejde med det faglige indhold.

Eksempel

En lærer i 2. klasse fortæller om sin tilgang til undervisning med forståelse:

Jeg har fx den ambition, at mine elever udvikler hensigtsmæssige metoder til at addere to cifrede tal. Jeg vil have, at mine elever skal forstå, hvorfor deres metoder virker. Kernen er jo i mindst lige så høj grad, at eleverne udvikler talforståelse, som at de har en metode, der virker.

Jeg tænker, at mine elever vil have svært ved at udvikle hensigtsmæssige metoder, hvis de ikke kan repræsentere tallene med fx klodser eller tegninger. Det bliver også vigtigt for dem, at de ved, at tallene kan opdeles i 10'ere og 1'ere, og det vil være en fordel for dem, hvis de kan veksle et antal 1'ere til 10'ere. Jeg begynder derfor forløbet med aktiviteter, der har fokus på to cifrede tal og deres egenskaber, især det med at de kan opdeles i 10'ere og 1'ere.

På den første dag i et tidligere forløb havde jeg tomme æggebakker med i skole. Der var plads til 10 æg i hver bakke. I begyndelsen af timen skulle eleverne fx afgøre, hvor mange æg man har, hvis der er 3 fyldte æggebakker og 3 løse æg. Senere skulle eleverne gå "den anden vej", dvs. tegne det antal æg, der svarer til fx 42. Jeg opdagede, at nogle elever i begyndelsen faktisk havde behov for at åbne æggebakkerne og tælle efter, selv om de egentlig vidste, at der var 10 i hver. Der var også nogle elever, som i begyndelsen tegnede 42 løse æg i stedet for fire 10-bakker og 2 løse. Først gradvist blev det en fælles praksis i klassen, at fx 42 kan tegnes med 4 firkanter (æggebakker) og 2 cirkler (æg).

Nu kunne jeg begynde at digte historier om forskellige antal æg, der bl.a. skulle lægges sammen. En af historierne handlede fx om min ven, der har to hønsehuse, som begge leverer æg. Hvor mange får han i alt, hvis der fx kommer 22 fra det ene hønsehus og 34 fra det andet? Eleverne kunne jo tegne sig frem til en løsning med firkanter og cirkler. De var selvfølgelig ikke lige hurtige til at finde resultatet. Jeg har nogle elever, der nærmest kan se det med det samme, andre elever som bruger tælleremse (10, 20, 30, 40, 50, 51, 52, 53, 54, 55), og jeg har få elever, der er virkelig afhængige af tegninger, fordi de indimellem har brug for at sætte 10 prikker på firkanterne (10 æg) og tælle en ad gangen. Men allerede på dette tidspunkt havde de jo faktisk alle en metode til at addere to cifrede tal uden tierovergang. De kunne tegne og forklare, hvad de gjorde, og som jeg ser det, er denne metode forbundet med forståelse.

Nogle elever kan hurtigt gå videre til at addere to cifrede tal med tierovergang. De tænker, at de kan "fylde" en æggebakke med 10 æg, hvis der bliver mere end 10 "løse æg" i deres beregninger. Jeg har også nogle elever, der efterhånden er gået væk fra at tegne æggebakker. De skriver bare tallene i stedet for. Andre elever har stadig brug for at tegne sig frem til løsninger. Det er efter min opfattelse ikke noget problem. Hvis elever skal have mulighed for at lære med forståelse, må de også have forskellige veje at gå.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- På hvilke måder retter læreren i eksemplet sin opmærksomhed mod elevens arbejde med det faglige indhold?
- På hvilke måder får eleverne i eksemplet mulighed for at lære med forståelse? Ville I gøre noget andet, hvis I stod i en tilsvarende undervisningssituation?

Eksemplet antyder en tilgang til undervisning på de yngste klassetrin inden for færdigheds- og vidensområdet regnestrategier. I læseplanen er det gjort tydeligt, at det i forbindelse med undervisningen inden for dette område er hensigten, at eleverne udvikler metoder til beregninger. Denne formulering er blandt andet valgt for at understrege, at ambitionen er noget andet og mere, end at eleverne får præsenteret beregningsmetoder, som de efterfølgende øver sig på. Formuleringen hænger sammen med, at eleverne skal lære med forståelse. Det er med andre ord ikke hensigten, at eleverne reproducerer beregningsmetoder, men at de udvikler metoder, fordi en sådan udvikling kun kan foregå, når den er forbundet med forståelse af tallenes og regningsarternes egenskaber.

I eksemplet gav læreren bl.a. eleverne mulighed for at se forbindelser mellem det, de allerede kan, og det nye, de skal lære, ved at lade dem bruge forskellige måder at tælle på, da de skulle udvikle måder at addere to cifrede tal på. På næsten tidsvarende vis gav læreren eleverne gode muligheder for at bygge videre på deres viden om, at to cifrede tal kan opdeles i 10'ere og 1'ere.

Dette betyder imidlertid ikke, at alle begreber og metoder nødvendigvis kan eller skal læres "nedefra", sådan at eleverne hele tiden har forståelsen med. I matematikundervisning kan der være perioder, hvor eleverne involveres i nogle måder at arbejde på, som de ikke nødvendigvis kan se en mening med i begyndelsen. For eksempel kan man forestille sig,

at en lærer på mellemtrinnet introducerer idéen om, at bogstaver kan repræsentere tal, i forbindelse med elevernes arbejde med ligninger, formler og sammenhænge. Det er svært at forestille sig, at eleverne af sig selv ville komme på en sådan idé. Til gengæld ville de kunne arbejde med problemstillinger, som peger på behovet for at repræsentere et ukendt tal eller en mængde af tal. Det kan være i en situation, hvor eleverne skal opdage, beskrive og begrunde en generel sammenhæng, fx sammenhængen mellem sidelængden og arealet af et kvadrat. I sådanne situationer etableres forståelse snarere ved, at læreren i begyndelsen introducerer, forklarer og taler med eleverne om deres opfattelse af "det nye". Efterfølgende involveres eleverne i flere forskellige situationer, hvori "det nye" indgår. Det kan fx dreje sig om flere situationer med sammenhænge, der kan beskrives med brug af en variabel. Igennem samtaler om disse situationer og pointen med at repræsentere variable tal med bogstaver kan elever gradvist udvikle den forståelse. Endemålet er således altid forståelse, men nogle begreber og metoder kan kræve en tilgang, hvor forståelse først følger efter, at eleverne er blevet involveret i "det nye".

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- På hvilke måder giver jeres undervisning eleverne mulighed for at udvikle matematisk forståelse?
- Er der begreber og metoder, som i særlig grad kræver, at eleverne må arbejde med dem i perioder, før de gradvist kan udvikle forståelse for dem? Hvordan kan en sådan udvikling foregå?

At lære matematik gennem undersøgende arbejde

Ordet "undersøge" går igen flere steder i kompetencemålene og læseplanen for matematik. Det er i sig selv et mål, at eleverne bliver i stand til at gennemføre matematiske undersøgelser. Fx er det et kompetencemål for statistik og sandsynlighed på 1.-3. klassetrin, at eleverne kan "udføre enkle statistiske undersøgelser", og for tal og algebra på 7.-9. klassetrin, at eleverne kan "anvende reelle tal og algebraiske udtryk i matematiske undersøgelser." Læseplanen lægger også op til, at selve matematikundervisningen i nogle sammenhænge skal have undersøgende karakter. Fx fremgår det af afsnittet om fagområdet matematik og matematik som fag i skolen: "Det tilstræbes i den forbindelse, at undervisningen har en form, der giver hver elev mulighed for at opleve sig selv som aktiv, undersøgende og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik."

Med hvad vil det egentlig sige at arbejde undersøgende i matematikundervisning? Først og fremmest kan undersøgende arbejde ses som en modsætning til en fagligt formidlende undervisning, hvor læreren præsenterer eleverne for begreber og metoder, som de efterfølgende arbejder med i øvelser og opgaver. Undersøgende matematikundervisning bygger ikke på lærerens direkte instruktioner af metoder og forklaringer af begreber, men på temaer, situationer eller problemer, som eleverne så vidt muligt skal forsøge at forklare, udrede eller løse i samarbejde med hinanden. I undersøgende matematikundervisning får elever ikke forklaret en bestemt metode, som de kan bruge til at kaste lys over temaet, situationen eller løse problemet. Det er en del af det undersøgende arbejde, at eleverne selv skal være med til at finde ud af, *hvordan* de kan forklare, udrede eller løse situationen eller problemet.

Undersøgende matematikundervisning kan foregå i korte eller i lange forløb, den kan antage mange forskellige former, og den kan være forbundet med flere forskellige mål. I det følgende er der både skitseret nogle korte og lange forløb med forskellige rammer. I nogle af eksemplerne er rammen givet som et problem af ren matematisk karakter.

I andre eksempler er rammen et tema, der inddrager matematik i omverdenen. I nogle eksempler lægger rammerne op til en høj grad af elevstyring, mens andre eksempler lægger op til en højere grad af lærerstyring.

Eksempel 1. Undersøgelser i en taltavle.

Vælg et 2×2 -kvadrat i en taltavle. Beregn summen af tallene i to modstående hjørner, fx $13 + 24$ og $14 + 23$.

Figur 10: Eksempel på undersøgelser i en taltavle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	2	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	98	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bliver de to summer altid lige store? Hvorfor? Hvorfor ikke?

Eksempel 2. To lige store dele.

Hvordan kan man inddеле en trekant i to lige store dele?

Eksempel 3. Lige eller ulige?

To spillere skiftes til at kaste 2 terninger. De ganger øjentallene. Den ene spiller vinder, hvis resultatet er lige. Den anden spiller vinder, hvis resultatet er ulige. Er spillet retfærdigt? Hvorfor? Hvorfor ikke?

Eksempel 4. Din matematikweekend.

Hvad har du lavet i din weekend? Kan du komme i tanke om nogle situationer fra din weekend, hvor du har brugt – eller kunne have brugt – matematik til noget? Hvad?

Tegn og skriv om situationerne. Forklar, hvad du har – eller kunne have – brugt matematik til. Hvordan?

Til overvejelse i matematikfaggruppen:

- Hvad kendetegner et godt oplæg til undersøgende arbejde?
- Hvordan finder I og deler oplæg i faggruppen?
- Hvilke muligheder har I for selv at udvikle og dele gode oplæg?

Undersøgende arbejde i matematik kan åbne muligheden for, at eleverne bliver aktive på nogle måder, som det er vanskeligt at fremme i en rent formidlende undervisning. Man kan fx forestille sig en gruppe elever i 5. klasse, der arbejder med at undersøge sammenhænge mellem summer i en taltavle (eksempel 4). I begyndelsen må de bruge noget tid på at forstå selve problemstillingen ved at stille faglige spørgsmål og søge information. Hvad betyder summer? Hvad vil det sige, at vi skal se, om der er en sammenhæng? Så prøver de en beregning og opdager, at summerne er ens. De tegner et nyt kvadrat et andet sted i taltavlen og regner igen. Samme resultat. I gruppen opstår der måske hurtigt den hypotese, at det nok altid vil give samme resultat, uanset hvor i taltavlen de prøver efter. Men hvorfor er det sådan? Hvis det lykkes for læreren at få klassen til at dykke ned i det spørgsmål, skaber det mulighed for, at eleverne kan udvikle ræsonnementer. "Der er jo på en måde de samme 10'ere og 1'ere i de to regnestykker", siger en elev, som har skrevet $21 + 32$ og $31 + 22$ på et stykke papir. Hvad mener hun? Situationen giver hende mulighed for at forklare sin tænkning, og de andre elever får mulighed for at lytte, forstå og forholde sig fagligt til hendes idé. Er de enige? Hvorfor eller hvorfor ikke? Samtalen kan lægge op til, at eleverne begrundere deres matematiske tænkning, og på senere klassetrin kan man forestille sig, at læreren også opfordrer eleverne til at bevise, at de har ret, fx ved at beskrive de to summer med brug af variable og derefter sammenligne deres værdier. Man kan også forestille sig, at læreren udvider undersøgelsen ved at spørge, om der er en tilsvarende sammenhæng, hvis kvadratet bliver større. Eller hvad nu, hvis vi erstatter kvadratet med et rektangel og undersøger den tilsvarende sammenhæng i den nye figur? Læreren kan opfordre eleverne til at komme med forslag til udvidelse af undersøgelsen, sådan at det undersøgende arbejde efterhånden også kommer til at omfatte elevernes egne formuleringer af problemer.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvilke måder kan jeres elever blive aktive på, når I arbejder undersøgende?
- Hvilke sammenhænge ser I mellem undersøgende arbejde og de matematiske kompetencer?

I undersøgende matematikundervisning er lærerens rolle væsentligt anderledes end i en formidlende undervisning, hvor det først og fremmest er hans opgave at forklare begreber og metoder, igangsætte elevernes arbejde med øvelser, og at hjælpe eleverne med at justere deres brug af begreber og metoder. Ofte er undersøgende matematikundervisning opbygget i tre typer af aktiviteter, der udfordrer læreren på forskellige måder. Den første type aktivitet vedrører afsættet for elevernes undersøgende arbejde. Læreren må præsentere og motivere en undersøgende aktivitet, sådan at eleverne opfatter den som meningsfuld. I nogle sammenhænge omtales denne type aktivitet som en iscenesættelse. Den anden type aktivitet vedrører den form for støtte og udfordring, som læreren bidrager med i elevernes undersøgende arbejde. Den tredje type aktivitet vedrører opsamlingen på elevernes undersøgende arbejde, hvor klassen reflekterer over de opdagelser og tanker, de forskellige elever har gjort sig igennem det undersøgende arbejde, og læreren søger at gøre matematiske pointer tydelige for klassen. Denne type aktivitet foregår oftest gennem samtale, fælles i klassen.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvilke erfaringer har I med lærerrollen i undersøgende arbejde?
- Hvilke strategier har I som lærere i de tre typer af aktiviteter, der er skitseret her?

En undersøgende tilgang til matematik er, som beskrevet, en væsentlig del af folkeskolens matematikundervisning, men det er vigtigt også at være opmærksom på, at ikke al matematikundervisning kan eller skal foregå undersøgende. Nogle elementer kræver mere formidlende tilgange til undervisningen, og en del af elevernes arbejde består også i øve sig på de metoder, de har udviklet. Det er matematiklærerens opgave at skabe en passende balance mellem undersøgende, formidlende og øvelsesorienterede sider af faget, sådan at undervisningen samlet set lever op til folkeskolens formål og til Fælles Mål.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvilke sider af matematik kræver, efter jeres opfattelse, mere formidlende og/eller øvelsesorienterede tilgange?
- Hvordan kan I på jeres skole skabe en passende balance mellem undersøgende, formidlende og øvelsesorienterede sider af faget?

Yderligere læsning: 4.2 Om at gennemføre matematikundervisning side 52

At lære matematik gennem samtale

I folkeskolens matematikundervisning er det et fokus, at eleverne bliver i stand til at kommunikere om og med matematik (jf. kommunikationskompetencen). En del af denne kommunikation vedrører samtaler om og med matematik. I matematikundervisning er samtale imidlertid også et *middel* til at lære matematik. I fagets formål står der således, at eleverne "selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation". I læseplanen er samtale også omtalt flere steder som et middel til udvikling af matematikkunnen. Fx står der, at elevernes udvikling af ræsonnementer og algebraisk tænkning bl.a. foregår gennem samtale.

Generelt spiller samtale en stor rolle i matematikundervisning, der er rettet mod elevernes udvikling af forståelse gennem undersøgende arbejde. Det er igennem samtale i klassen, at eleverne får mulighed for at engagere sig i matematiske undersøgelser, for at dele idéer og for at afklare forståelser. Det er også igennem samtale, at eleverne får mulighed for at forklare og argumentere, og at læreren får mulighed for at samle op på de opdagelser, eleverne har gjort sig gennem deres undersøgelser.

I de følgende episoder fortæller tre matematiklærere om forskellige aspekter af samtale i matematikundervisning og om deres strategier i samtalen. Efterfølgende lægges op til refleksion over de potentialer og begrænsninger, samtale i matematikundervisning kan have.

Episode 1

Jeg bruger bl.a. samtale i min introduktion af de opgaver eller problemstillinger, eleverne i min klasse skal arbejde med. Min erfaring er, at der for mange elever kommer til at gå rigtig meget tid, som primært handler om at finde ud af, hvad opgaven går ud på. Jeg synes, det er frustrerende, hvis eleverne bruger mere tid på at læse og forstå end på helt centrale dele af matematisk tænkning som problembehandling, ræsonnement og modellering. Derfor prøver jeg tit at sætte scenen for det, eleverne skal arbejde med, ved at fortælle en historie og ved at lade eleverne spørge og tænke med i historien. Mit mål med denne tilgang er, at eleverne skal komme til at "eje" problemstillingerne og kunne gå til dem med det samme.

Forleden fortalte jeg fx mine elever i 4. klasse en delvist opdigtet historie om to isboder, der ligger tæt på det sted, hvor jeg har sommerhus. I begge isboder kan man købe gammeldags isvafler. I den ene isbod koster hver kugle is 7 kroner, og man skal ikke betale for vaflen. I den anden isbod koster hver kugle is kun 5 kr., men man skal også betale 8 kroner for vaflen. Jeg tegnede de to isboder på tavlen. Når jeg fortæller den slags historier, er der som regel nogle elever, der også får lyst til at fortælle om deres erfaringer med gammeldags isvafler. De fortæller fx, hvilke slags is de godt kan lide, eller om hvor man kan købe ekstra store isvafler. I begyndelsen af samtalen er mit fokus især på at sikre mig, at alle er med på, hvad en gammeldags isvaffel er, og hvad det vil sige at skulle betale pr. kugle og for en vaffel. Derefter prøver jeg at dreje samtalen ind på priseksemppler. Hvem kan fortælle mig, hvad det koster at købe en vaffel med 2 kugler det ene sted? Det andet sted? Hvem kan skrive et regnestykke, I kan bruge til at regne det ud? En af eleverne skrev $7+7$ for det ene ishus og $8+5+5$. Vi talte om andre måder at skrive det på, og andre elever skrev $2\cdot 7$ og $8+2\cdot 5$. Det sidste regneudtryk gav anledning til anledning til at tale om, hvad der skulle regnes ud først – plus eller gange? På et tidspunkt drejede jeg samtalen ind på det spørgsmål, jeg ville have eleverne til at arbejde i lidt længere tid med på egen hånd: Hvor er det egentlig billigst at købe is? En elev sagde, at hvis man køber to kugler is, så er det i hvert fald billigst ved det ishus (pegede). Men hvordan går det, hvis man køber andre antal kugler?

Når jeg sætter elever i gang med den slags spørgsmål, prøver jeg tit at få dem til at overveje og udveksle, hvordan de vil undersøge sagen. Nogle elever sagde, at de ville prøve at regne priser ud for nogle forskellige antal kugler, og andre elever sagde, at de ville bruge en tabel. De viste på tavlen, hvordan de tænkte, at deres tabel kunne se ud. Jeg håber på den måde, at alle elever i klassen får idéer til, hvordan de kan komme i gang med opgaven.

Episode 2

Jeg bruger bl.a. samtale i de perioder af undervisningen, hvor eleverne arbejder med oplæg på egen hånd. Sådanne perioder giver mig mulighed for at tale med enkeltelever eller med små grupper af elever om deres arbejde. Samtalerne kan selvfølgelig have meget forskellig karakter. Nogle gange har eleverne fx brug for hjælp til at læse eller forstå et ord i en opslagsbog, og så læser jeg højt og forklarer. Andre gange er de gået helt i stå i en problemløsningsopgave. I denne type situationer bestræber jeg mig på ikke at fortælle direkte, hvad eleverne kan gøre for at løse opgaven. Pointen med at arbejde med problemløsning er jo netop, at de oplever og overvinder den fastlåshed, problemløsning kan give. I stedet prøver jeg at forstå elevernes strategier og at stille spørgsmål, som i højere grad vedrører deres proces end det faglige indhold, de arbejder med.

For nylig arbejdede eleverne i min 8. klasse fx med en opgave, hvor de skulle prøve at finde ud af, hvordan man kan inddele en trekant i to lige store dele. Hver gruppe havde fået en pap-trekant og en saks. En gruppe var gået i stå. Jeg bad dem først om at fortælle, hvad de foreløbig havde gjort. En fra gruppen fortalte, at de havde fundet trekantens areal ved at måle trekantens grundlinje og højde, men nu vidste de ikke, hvad de skulle bruge deres resultat til. De vidste med andre ord, hvor stort areal halvdelen af trekanten havde, men det hjalp dem ikke rigtigt til at finde ud af, hvordan den skulle deles. Jeg spurgte, om nogen fra gruppen havde idéer til, hvordan de kunne komme videre, men de rystede alle sammen på hovedet. Derefter spurgte jeg, om de kunne tegne en trekant, som de godt kunne dele i to lige store dele – altså, om de kunne løse problemet i et lettere tilfælde. En fra gruppen tegnede en ligebenet trekant og sagde, hun godt kunne dele denne trekant i to lige store dele. Hun viste med et linjestykke fra spidsen af

topvinklen og vinkelret ned på grundlinjen, hvordan hun ville gøre. De andre i gruppen var enige om, at det var en holdbar løsning, og en sagde, at man måske skulle "tegne en streg, der deler en vinkel i to lige store dele". Det så ud til at fungere med den ligebenede trekant, så måske ville det også fungere med andre trekkanter? Selv om pigens hypotese senere viste sig ikke at fungere for alle trekkanter, så bragte samtalen dem alligevel videre i deres problemløsning, og samtidig fik de forhåbentlig en erfaring med, at det kan være en god strategi at løse et enklere problem, hvis man er gået i stå i det egentlige problem.

Det er selvfølgelig ikke altid, at det går lige så glat, når jeg skal hjælpe en elevgruppe videre, men generelt tror jeg, at mine strategier i samtalen er hensigtsmæssige. Det handler om at være opmærksom på, om eleverne har forstået problemet rigtigt, og om at lytte og forstå deres vinkel på sagen. Jeg vil helst hjælpe dem videre på en måde, som er i tråd med det, de tænker i forvejen. Det handler også om at undgå at hjælpe for direkte. Det er tit bedre at støtte elevernes proces frem for at forklare dem noget mere stoffagligt. Også anden gang, de spørger, forsøger jeg at give hjælp i deres proces frem for at give direkte hjælp. I opgaven med trekkanter kan det fx være, jeg spørger, om de vil kunne finde et sted at læse noget om trekkanter, som vil kunne hjælpe dem. Først senere i deres proces kan jeg finde på at give mere direkte hjælp, fx at give dem det hint, at de kan undersøge, om de linjer ved trekanten, de tidligere har arbejdet med (vinkelhalveringslinje, højde og median), kan være en hjælp for dem.

Episode 3

Jeg bruger bl.a. samtale i opsamlingen på elevers arbejde. I den slags samtaler synes jeg, det er vigtigt, at eleverne forklarer, hvordan de har arbejdet, og hvilke matematiske tanker de har gjort sig. Samtidig synes jeg, det er vigtigt, at jeg forsøger at sætte ord på de matematiske pointer, der har været i arbejdet, og ord på, hvordan disse pointer hænger sammen med det, eleverne har lært tidligere. Udfordringen for mig består bl.a. i, at jeg på den ene side gerne vil bygge på elevernes input, men på den anden side også gerne vil have eleverne til at få øjnene op for nogle bestemte pointer.

I sidste uge ville jeg fx gerne samle op på en time i 2. klasse, hvor eleverne havde arbejdet med hovedregning. De havde haft til opgave i 20 minutter at løse forskellige plusstykker og tænke over, hvordan de lettest kunne regne disse stykker i hovedet. Plusstykkerne havde jeg skrevet på tavlen, og jeg havde sørget for, at der var stykker i forskellige sværhedsgrader. I opsamlingen bad jeg nogle elever fortælle om et af de stykker, de havde valgt. De skulle fortælle, hvordan de havde regnet stykket i hovedet, og de skulle fortælle, hvad de havde fået stykket til. En elev fortalte fx, at han havde regnet $8+7$ i hovedet ved at tælle "7 op fra 8", altså 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. En anden elev fortalte, at han havde regnet det samme stykke ved at "doble 8 og trække 1 fra". En tredje elev havde også regnet $7+8$, men hun sagde: "Først lagde jeg 2 af de 7 oven i 8. Det blev 10. Så lagde jeg de sidste 5 til. Det blev 15." Vi talte om de forskellige hovedregningsstrategier i klassen og gav dem navne. Den første kom til at hedde "Tælle videre". Den anden kom til at hedde "Doblemetoden", og den tredje kom til at hedde "Forbi 10". På den baggrund kunne vi bl.a. tale om, hvordan man kan bruge disse strategier i forskellige stykker, og vi kunne tale om, hvilken strategi der kan være god til hvilke stykker. Nogle elever sagde fx, at det kunne være fint at bruge "tæl videre" til plusstykker, hvor "det ene tal er lille", og at man så helst skulle tælle videre fra det største tal. Nogle elever sagde fx, at det kunne være fint at bruge "doblemetoden", hvis de to tal var ca. lige store. Andre sagde, at "fordi 10" kunne være god, når "enerne i stykket gav mere end 10 tilsammen", altså fx i stykket $15+9$, der så kan regnes som $15 + 5 + 4$.

De tre strategier kom til at fremstå som en slags "dagens pointe". Vi talte bl.a. om, at "fordi 10" hænger sammen med 10'er-venner, som klassen tidligere har arbejdet med, altså fx at $6 + 4 = 10$ og $3 + 7 = 10$. De vil især kunne udnytte denne strategi, hvis de er gode til 10'er-venner, og efter min opfattelse er det vigtigt, at alle eleverne efterhånden bliver gode til "forbi 10", fordi udnyttelsen af 10-talssystemet kan give en fordel i mange typer af beregninger. Hvis ingen elever af sig selv havde bragt den på banen, havde jeg selv præsenteret denne strategi. Jeg synes dog også,

det er godt, hvis eleverne som overgang får mulighed for at bruge strategier, der alene bygger på, at de kan tælle (som "tæl videre"), og jeg synes, det er godt, hvis eleverne generelt har et blik for, at de kan vælge en strategi, der passer til netop den beregning, de skal foretage.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvilke potentialer og udfordringer er der, efter jeres opfattelse, forbundet med de forskellige typer samtaler, som episoderne beskriver?
- Hvordan bruger I selv samtale som middel til læring i jeres undervisning?

Yderligere læsning: 4.2 Om at gennemføre matematikundervisning side 52

4.3 Om evaluering i matematikundervisning

Det fremgår af folkeskoleloven, at der som et led i undervisningen løbende skal foretages evaluering af elevens faglige udbytte i fag og emner set i forhold til kompetencemål og opmærksomhedspunkter. Det fremgår desuden, at hensigten med at foretage evaluering i matematikundervisning er, at:

- Kunne informere forældre om elevens faglige udbytte.
- Kvalificere tilrettelæggelse af undervisning.
- Vejlede den enkelte elev.

Evaluering i matematikundervisning skal derfor på den ene side bidrage til at beskrive den enkelte elevs faglige udbytte og på den anden side bidrage til at støtte elevens fortsatte faglige udvikling. Den førstnævnte hensigt med evaluering omtales ofte som summativ evaluering, og den sidstnævnte hensigt med evaluering omtales ofte som formativ evaluering. Summativ evaluering opsummerer elevens faglige udbytte og er således evaluering af læring, mens formativ evaluering former den fremtidige undervisning og således er evaluering for læring.

Hensigten med dette afsnit er først og fremmest at give inspiration til og lægge op til diskussion af, hvordan formativ evaluering kan foregå i praksis inden for faget matematik.

Tre spørgsmål knyttet til formativ evaluering

Formativ evaluering kan grundlæggende forbindes med tre forskellige spørgsmål:

- Hvor skal vi hen?

Dette spørgsmål vedrører undervisningens hensigt. Som det fremgår af folkeskolelovens § 13, skal elevens udbytte af undervisningen ses i forhold til kompetencemål og opmærksomhedspunkterne i Fælles Mål. Evaluering er med andre ord forbundet med Fælles Mål. Kompetencemålene giver en langsigtet retning for de hensigter med fagene, der er centralt bestemt. Opmærksomhedspunkterne beskriver de færdigheder, der er en forudsætning for, at eleven kan få tilstrækkeligt udbytte af undervisningen på de efterfølgende klassetrin og i undervisningen på tværs af fag. Det er op til læreren, i hvilken grad han eller hun vælger at fokusere på mere kortsigtede mål for sin undervisning. En matematiklærer kan fx vælge at evaluere sine elevers brøkbegreb, fordi det er et element i opfyldelsen af et af de kompetencemål for stofområdet Tal og algebra.

- Hvor er vi?

Dette spørgsmål vedrører elevens kunnen. Evalueringen må skaffe læreren indblik i de af elevens aktuelle færdigheder, viden og kompetencer, der er relevante for svaret på spørgsmålstal 1). En matematiklærer, der vil evaluere sine elevers begreb om brøk, kan fx skaffe sig indblik i elevernes kunnen ved at lytte til deres faglige forklaringer om brøker, vurdere brøkopgaver, de har løst, eller anvende en test, der omfatter viden om brøker. Det er et kernespørgsmål, hvordan læreren skaffer sig et tilpas dækkende og brugbart indblik i elevernes kunnen inden for de rammer, som undervisningen har.

- I hvilken retning skal vi gå?

Dette spørgsmål vedrører den undervisning, som følger efter evalueringen. Hvilken betydning skal den indsigt, læreren har fået i elevens faglige kunnen, have for den kommende undervisning, og hvordan kan læreren bedst muligt støtte eleven til at gå i den rigtige retning?

I de følgende tre episoder beskriver tre matematiklærere nogle tanker om evaluering knyttet til de tre spørgsmål. Efterfølgende stilles en række refleksionsspørgsmål, fx til brug i matematikfaggruppen. Spørgsmålene fokuserer på de potentialer og begrænsninger, som lærernes tilgang til evaluering giver, og på jeres egen praksis med evaluering i matematikundervisning.

Episode 1

I min undervisning er evaluering en helt integreret del af det, der foregår i timerne. Det betyder, at jeg ikke sætter nogle aktiviteter i gang, som udelukkende er til for at skaffe mig indblik i det, eleverne kan. Jeg får jo det indblik gennem samtaler og observationer i den daglige undervisning. Jeg lytter til elevernes faglige forklaringer, og jeg observerer, hvad de gør, når de er i gang med opgaver og andre aktiviteter. Desuden ser jeg også en hel del af deres opgaveløsninger og andre produkter, når jeg er i klassen, og når jeg engang imellem beder dem aflevere noget til mig.

Jeg synes, at stort set alle de aktiviteter, der foregår i min undervisning, giver mig mulighed for at få en form for indblik i, hvor eleverne er. Nogle af mine observationer har sådan lidt mere overordnet karakter. Det kan fx være, når jeg registrerer, at en elev melder sig lidt ud af den faglige samtale i klassen, eller omvendt, når jeg registrerer, at en elev kommer mere og mere på banen. Andre af mine observationer har mere specifik karakter. Jeg opdagede fx for nylig, at en hel del af eleverne i min 3. klasse svarede forkert på en opgave, hvor de skulle udfylde den tomme plads i dette udtryk: $7 + 8 = ___ + 9$. Jeg håbede, at de ville løse opgaven uden at regne $7+8$ først, men fx ved at tænke, at det tal, der mangler, må være 1 mindre end 7, for 9 er 1 større end 8. Det viste sig imidlertid, at mange af dem svarede 15. De tænkte simpelthen, at lighedstegnet signalerer, at vi skal regne $7+8$. De tænkte ikke, at lighedstegnet betyder, at de to udtryk på hver sin side skal have samme værdi. Det betød, at jeg i den følgende undervisning satte særligt fokus på lighedstegnets betydning. Et af mine mål er, at eleverne forstår lighedstegnet på en måde, som gør, at de kan sammenligne udtrykkene på hver sin side af lighedstegnet og udnytte talforståelse og ræsonnementer til at løse opgaver som denne. Jeg ser det bl.a. som et skridt på vejen til ligningsløsning.

Udfordringen i den måde jeg evaluerer på, er at huske de faglige ting, jeg ser og hører hos mine elever. Til det formål har jeg simpelthen en lille notesbog, hvor der er afsat en side til hver elev. Det er naturligvis begrænset, hvor meget jeg har tid til at skrive i notesbogen. Derfor bruger jeg den fidus kun at notere, når der er et eller andet, der overrasker mig hos en elev. Altså, fx når de siger eller gør noget fagligt, som overrasker mig positivt eller negativt. Notesbogen gør bl.a., at jeg ofte har nogle meget konkrete eksempler fra undervisningen, som jeg kan bruge ved skole-hjem-samtaler.

Episode 2

I hovedparten af min undervisning bruger jeg en lærebog, der både støtter mig ved at komme med forslag til undervisningens mål, indhold og til evaluering af elevernes læring. Hvert afsnit i lærebogen afsluttes med nogle opgaver, der skal give indblik i, hvad eleverne har lært ved at arbejde med kapitlet. Jeg bruger de fleste af disse opgaver, for de giver mig et samlet overblik over, hvad eleverne kan. Samtidig har de også den fordel, at de gør det tydeligt for eleverne, hvad det forventes, at de har lært. Hvis de kan løse opgaverne, ved de, at de er godt med. Hvis de har problemer med opgaverne, ved både de og jeg, hvor det halter.

En af udfordringerne ved at bruge lærebogens evalueringssider er for mig, at de jo afslutter et kapitel. Efter evalueringssiderne er der et nyt afsnit i lærebogen, som kan handle om noget helt andet fagligt, og der kan gå lang tid, før bogen kommer tilbage til det faglige indhold, som evalueringssiderne handler om. Jeg kan sagtens bruge evalueringssiderne til at give eleverne feedback på deres viden og kunnen, men jeg synes ikke, at bogen hjælper mig så meget til, hvordan jeg kan tilrettelægge den efterfølgende undervisning, sådan at den bygger på evalueringen. Derfor indlægger jeg tit en time eller to mellem hvert kapitel i lærebogen, hvor vi fokuserer særligt på de ting, som evalueringen har vist. For nylig afsluttede vi i min 7. klasse fx et kapitel om statistik. Evalueringen viste, at eleverne generelt har fået rimelig godt styr på at finde middeltal og median af datasæt, men på den anden side synes jeg ikke, at de er kommet særlig langt med at bruge middeltal og median til at beskrive og sammenligne datasæt. Jeg tilrettelagde derfor to timer, der fokuserede på dette. I den ene time skulle eleverne tegne to forskellige datasæt, der skulle handle om fordelingen af lærernes aldre på to forskellige skoler. I de to datasæt skulle middeltallet være det samme, men medianerne skulle være forskellige. I den anden time skulle eleverne se på nogle diagrammer, jeg har fundet. Diagrammerne viste forskellige fordelinger. Elevernes opgave var simpelthen at forklare, hvad diagrammerne viste. I deres forklaringer skulle de bruge matematikfaglige ord.

Episode 3

Det vigtigste redskab i den løbende evaluering er for mig åbne opgaver. Jeg har svært ved at se, hvordan jeg kan evaluere elevernes matematiske kompetencer, hvis jeg ikke anvender åbne opgaver, som giver eleverne mulighed for at løse problemer, modellere og/eller ræsonnere. Opgaverne kan være åbne på den måde, at der er mange forskellige veje til løsningen. De kan også være åbne på den måde, at der ikke kun er en løsning. I sådanne opgaver kan eleverne svare på flere forskellige niveauer. Jeg kan godt lide, når den samme opgave kan udfordre alle elever i klassen. Det betyder, at vi har en fælles ramme for den kompetence og det stof, vi fokuserer på. Hvis vi ikke har en sådan fælles ramme, er det meget svært at have en fælles faglig samtale i klassen. En sådan fælles samtale giver eleverne rigtig gode læringsmuligheder, og den giver mig meget information om de enkelte elevers faglighed.

Det er tit nogle meget enkle træk, jeg bruger, når jeg vil give en åben opgave. Jeg synes fx, at det ofte er en god idé at vende en opgave, sådan at eleverne på en måde får det, der typisk er svaret i stedet for spørgsmålet. Som opfølgning på et forløb om ligninger i 8. klasse kan en åben opgave fx være: Svaret på en ligning er $x=5$. Hvordan kan ligningen have set ud? De fagligt svageste af mine elever fandt på løsninger som $2 \cdot x = 10$ og $x + x + x = 15$. De fagligt stærkeste fandt på løsninger som $x^3 = 125$ og $35 / x + 3x = x^2 - \sqrt{9}$. Efter min opfattelse er den opgave åben på den måde, at eleverne kan arbejde på forskellige måder med den. Nogle af mine elever visualiserede fx ligningerne med tændstikker og tændstikæsker, som hver repræsenterer den ubekendte, eller med tegninger. Andre af mine elever brugte et CAS-program som hjælpemiddel, og så var der nogle, der arbejdede uden hjælpemidler. Den er også åben på den måde, at den giver eleverne mulighed for at afslutte på forskellige niveauer.

Undervejs i deres opgaveløsning var det let for mig at udfordre eleverne på forskellige måder. Til nogle sagde jeg fx: Kan du finde på en løsning, hvor der er to x'er? Kan du finde på en løsning, hvor der er flere regnetegn? Kan du finde på en løsning, hvor x står på højre side af lighedstegnet? Til andre sagde jeg fx: Kan du finde på en løsning, hvor der er x'er på begge side af lighedstegnet? Kan du finde på en løsning, hvor der indgår potenser? Hvad med kvadratrødder?

Deres løsninger siger mig, sammen med de samtaler, jeg kunne nå at have med nogle af eleverne undervejs, noget om deres forståelse af ligninger, ubekendte, deres regnestrategier og deres symbolbehandling.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Overvej, hvilke potentialer og begrænsninger I ser i de tre læreres måde at tænke evaluering på?
- Hvordan bidrager jeres evalueringspraksis til at kunne informere forældre om elevens faglige udbytte, kvalificere tilrettelæggelse af undervisning og vejledning af den enkelte elev?
- Hvordan kan I samarbejde om fortsat at udvikle jeres evalueringspraksis? Er der elementer af den løbende evaluering, som I finder det særligt relevant at fokusere på, fx bestemte kompetencemål?

Yderligere læsning: 4.3 Om evaluering i matematikundervisning side 52

4.4 Om måls rolle i tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering

Matematikundervisning skal, ifølge folkeskoleloven, tilrettelægges ud fra folkeskolens formål, formålet for matematik og kompetencemålene i matematik. Desuden skal undervisningen følge en læseplan, som er kommunalt vedtaget. Læseplanen skal støtte undervisningens tilrettelæggelse ud fra færdigheds- og vidensområderne med henblik på at nå kompetencemålene. En kommunalbestyrelse kan fx beslutte at anvende den vejledende læseplan, som Børne- og Undervisningsministeriet har udsendt.

Formål, kompetencemål og læseplaner spiller således en central rolle i tilrettelæggelse af matematikundervisning og har derfor også betydning for undervisningens gennemførelse og evaluering. Det er imidlertid op til den fagprofessionelle at afgøre, hvordan han eller hun i praksis vil tilrettelægge, gennemføre og evaluere matematikundervisning, der følger læseplanen i retning mod fagets kompetencemål og formål. Dette afsnit er ment som inspiration til dette arbejde.

Om forskellen på formål og mål

Et formål beskriver en *hensigt* – det, man ønsker at opnå som resultatet af en bestemt aktivitet. I forbindelse med matematikundervisning er det fx et formål med undervisningen, at eleverne skal blive i stand til at begå sig hensigtsmæssigt i situationer, der vedrører matematik. Formålet *skal forklare, hvorfor* vi underviser i matematik i folkeskolen.

Et mål beskriver det, man ønsker at frembringe for at opnå formålet. I matematikundervisning er det fx et kompetencemål, at eleverne kan anvende rationale tal og variable i beskrivelser og beregninger. Mål kan således opfattes som en slags milepæle på vej mod formålet.

Den grundlæggende idé med mål i undervisningen

Den grundlæggende idé med at formulere og anvende mål i fx matematikundervisning er at skabe retning for undervisningens tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering. Mål kan fungere som pejlemærker for, hvor undervisningen skal bevæge sig hen. Fx kan man forestille sig, at en matematiklærer tilrettelægger en aktivitet, hvor hans elever i 4. klasse skal undersøge, på hvor mange forskellige måder de kan dele to forskellige kvadrater i to halvdeler, *fordi* han har nogle bestemte mål, som han selv har formuleret inden for rammerne af Fælles Mål. Det kan fx tænkes, han ønsker, at eleverne skal forstå, at halvdeler kan se ud på mange forskellige måder (fx have forskellige størrelser), og at to halvdeler af det samme kvadrat ikke nødvendigvis behøver at være ens.

Man kan også forestille sig, at disse mål bliver styrende for den måde, han støtter og udfordrer eleverne på i undervisningen. Når hans elever har tegnet en løsning, hvor de har delt et kvadrat i to halvdele med en diagonal, udfordrer han dem måske til at tegne en løsning, som ikke kan tegnes med ét linjestykke, fordi det vil kunne føre eleverne i retning af det ene mål.

På tilsvarende vis kan man forestille sig, at lærerens formulering af mål giver ham en slags referencepunkt i hans evaluering af elevernes arbejde i timen. Fik eleverne mon de forståelser, som han håbede, de ville opnå?

Det er en faglig diskussion, i hvilken grad det er hensigtsmæssigt for matematiklæreren at formulere flere mål end de lovpligtige, i hvilken grad mål bør være retningsgivende for undervisningens tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering, og i hvilken grad det er hensigtsmæssigt at involvere eleverne i undervisningens mål. Det er også en faglig diskussion, hvad der er gode mål, og hvordan disse mål evt. kan fremtræde for eleverne i undervisningen.

Forskellige typer mål

Mål i matematikundervisning kan have mange forskellige former, retninger og tidshorisonter. De kan fx rette sig mod undervisningen eller mod elevers læring, og de kan fx sigte på sociale eller faglige aspekter. Som det fremgår af det forrige, er nogle mål centralt bestemt i Fælles Mål, mens andre mål kan være formuleret lokalt i en kommune, på en skole, i et fagteam eller af den enkelte fagprofessionelle.

I dette afsnit fokuseres der specifikt på faglige mål, som er rettet mod det, en lærer ønsker, at hans elever skal lære i en matematikklasse, og som er formuleret lokalt inden for rammerne af Fælles Mål. Sådanne mål kan også have forskellige former og tidshorisonter. Et mål kan fx beskrive det, man ønsker, at en elev kan sige, skrive eller demonstrere som resultat af et undervisningsmodul eller et undervisningsforløb. Sådanne mål omtales i nogle sammenhænge som præstationsmål. De beskriver, hvad eleverne bør være i stand til at gøre, men de beskriver ikke nødvendigvis elevernes forståelse af den matematiske idé, der ligger bag deres handlinger eller præstationer. Eksempel: Eleverne kan oversætte en regnehistorie om multiplikation til et gangestykke og forklare, hvordan tallene i stykket hænger sammen med regnehistorien.

Et mål kan fx også beskrive den forståelse, som man ønsker, at eleverne har opnået som resultat af undervisningen. Sådanne mål omtales i nogle sammenhænge som mestringsmål. De beskriver den matematiske pointe, som eleven er i gang med at udvikle, men ikke nødvendigvis, hvad der gør det synligt, i hvilken grad eleven har forstået pointen. Eksempel: Eleverne kan forstå multiplikation som lige store mængder, der gentages, og forstå betydningen af tallene i et gangestykke.

I de følgende tre episoder beskriver tre matematiklærere deres tanker om og praksis med mål. Efterfølgende stilles nogle refleksionsspørgsmål, fx til brug i matematikfaggruppen. Spørgsmålene fokuserer på de potentialer og begrænsninger, som lærernes brug af mål giver, og på jeres egen praksis med mål i matematikundervisning.

Episode 1

For mig er det afgørende, at jeg i forbindelse med mine undervisningsforløb har overvejet, hvad eleverne skal lære. Hvis jeg ikke har disse overvejelser, så er det let at komme til at tænke på undervisningen som om, den går ud på, at eleverne skal udfylde den matematikbog, vi bruger. I virkeligheden er bogen jo bare et redskab til, at eleverne lærer det, vi gerne vil have dem til at lære. Jeg bruger derfor mine overvejelser om undervisningens formål og mål til at udvælge og tilpasse opgaver i lærebogen.

Jeg har også disse overvejelser i mit baghoved, når jeg underviser. Hvis jeg fx går efter, at eleverne skal udvikle forståelse for lighedannede, skal jeg jo sørge for, at samtalen i undervisningen retter sig mod det, jeg opfatter som de vigtige dele. Fx vil jeg gerne have mine elever

i 8. klasse til at få en intuitiv forståelse for, at hvis vinklerne i to trekanter er parvis lige store, så bliver trekanterne også ligedannede. Der er nogle opgaver i matematikbogen, der drejer sig om dette, og når jeg har målet i baghovedet, hjælper det mig til at finde på gode spørgsmål til eleverne. Jeg spørger, om de kan tegne to trekanter, der har parvis lige store vinkler, men som ikke er ligedannede. Når de opdager, at det ikke ser ud til at kunne lade sig gøre, spørger jeg dem hvorfor. Hvis de har svært ved at komme med gode argumenter, prøver jeg at få dem til at tegne de to trekanter i et geometriprogram, sådan at et par af de ens vinkler har samme vinkelspids, altså så de to trekanter kommer til at ligge oven i hinanden. Nu kan de nærmest se, at trekanterne må være ligedannede. Mine overvejelser om det, eleverne skal lære, er også centrale, når jeg evaluerer deres læring. Det er jo de overvejelser, jeg skal evaluere i forhold til. Det er fx mindre interessant, om eleverne nu også har fået lavet alle opgaverne i bogen. Jeg bruger bogens lærervejledning som inspiration og læser læseplanen. På den måde kommer jeg ind i idéerne bag bogens aktiviteter og kan nemmere selv få nogle konkrete billeder på, hvad målene i forløbet skal være.

Episode 2

Som udgangspunkt bruger jeg de vejledende færdighed- og vidensmål, som hører med til Fælles Mål. De indgår i min årsplan og hjælper mig til, at jeg kommer godt omkring alle de forskellige dele af Fælles Mål, som jeg skal. Jeg synes, der er behov for at konkretisere fagets formål og kompetencemålene, og de vejledende mål giver mig den form for konkretisering, jeg har brug for. Selvfølgelig kan der være mål ind imellem, som jeg tillægger lidt mindre betydning end andre, og jeg arbejder ikke nødvendigvis i den rækkefølge, som det er foreslået i disse vejledende mål.

Det er vigtigt for mig, at mine elever også bliver inddraget i målene for undervisningen. Det giver dem mulighed for at være rettet imod det, de skal lære. Men de vejledende færdigheds- og vidensmål er jo ikke formuleret i et sprog, der fx kan forstås af min 6. klasse. Derfor får de ikke selve målformuleringerne, men jeg taler med dem om det, de er i gang med at lære, og jeg lader dem stille spørgsmål og komme med forslag til undervisningen, sådan at de bliver involverede i deres egen læreproces. Nogle gange giver det mig nogle udfordringer, fx da jeg egentlig havde brug for at fortælle dem, at de skulle i gang med funktionsbegrebet. For hvordan præsenterer man det, de skal lære, når fagordene endnu ikke har nogen betydning for dem? I stedet fortalte jeg, at vi i det kommende forløb skulle arbejde med de sammenhænge, der i nogle situationer kan være mellem tal. Vi talte om hverdagsammenhænge, som sammenhængen mellem et antal gram slik og det beløb, man skal betale for det, og vi talte om sammenhænge i omverden, som sammenhængen mellem det antal timer, man spiller computerspil, og den energi, man bruger på det. Efterhånden kunne de selv komme med bud på andre sammenhænge fra matematik og fra omverdenen. På den baggrund kunne jeg bl.a. forklare dem, at de skulle lære at opdage sådanne sammenhænge og beskrive dem med ord, tabeller, grafer og regneudtryk.

Episode 3

Efter min opfattelse er folkeskolens formål, formålet og kompetencemålene for matematik de bedste pejlemærker for tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af undervisning. Jeg synes, det er et problem, hvis målene for undervisningen bliver for opdelt, sådan at man ikke kan fornemme de mere overordnede hensigter med undervisningen. Fx er det et pejlemærke for mig, at min undervisning skal bidrage til, at børnene skal være borgere i et demokratisk samfund. Det betyder helt konkret i min undervisning, at jeg gør meget for, at alle får en stemme i undervisningen – at vi skal lytte til alle og forholde os til deres bidrag i undervisningen på en ordentlig måde. Det kan jo være svært at få øje på dette vigtige aspekt af undervisningen, hvis mit pejlemærke fx var: Nu skal eleverne lære at gange to to cifrede tal.

Selvfølgelig er der nogle dele af matematik, som kræver nogle mere detaljerede overvejelser, end det kommer til udtryk i formål og kompetencemål. Fx skal eleverne jo på et tidspunkt forstå procentbegrebet og lære procentregning. Derfor kan jeg også have nogle delmål, som vedrører sådanne fagområder. Jeg synes dog stadig, at det er helt afgørende, at jeg ser fx procentbegrebet og procentregning i lyset af formålene. Det er jo formålene, der udgør grunden til, at de skal lære

netop dette. For mig gør formålene det fx klart for mig, at eleverne skal kunne forstå procentbegrebet i de sammenhænge, hvor det optræder i deres omgivelser. De skal også kunne forholde sig til fx udsagn i medier om procenter. Det betyder bl.a., at de skal være sikre på forskellen mellem procentpoint og procent. Hvad betyder udsagnene? Holder de? Kunne de være formuleret på en klarere måde?

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Overvej, hvilke potentialer og begrænsninger I ser i de tre læreres måde at bruge mål på?
- Hvordan bruger I Fælles Mål i forbindelse med tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af matematikundervisning?
- Hvordan er det hensigtsmæssigt og praktisk realiserbart at bruge mål, som I selv formulerer, i matematikundervisningen?

Yderligere læsning: 4.4 Om måls rolle i tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering side 52

5 Tværgående emner og problemstillinger

Læseplanen for matematik giver i kapitlet om tværgående emner og problemstillinger en ramme for, hvilken rolle matematik kan spille, når det indgår i undervisning på tværs af fagene. Matematik kan:

- Beskrive omverden
- Forme omverden
- Være et redskab
- Løse problemer.

Dette kapitel giver eksempler på skitser til emner og problemstillinger, hvor matematik spiller hver af de nævnte roller. Kapitlet er ment som inspiration til undervisningen i tværgående emner og problemstillinger (jf. folkeskolelovens § 5).

Eksempel 1

Et tværgående emne på de yngste klassetrin kan være "spiring og vækst". I dette emne kan fagene natur og teknologi, dansk og matematik indgå. Eleverne sår bl.a. frø og undersøger forskellige faktorerens betydning for spiring og vækst. Det kan fx dreje sig om betydningen af vand/tørke, lys/mørke og varme/kulde. Matematik bidrager i emnet ved at beskrive forløbet og resultaterne. Eleverne indsamler løbende data, som de kan bygge beskrivelserne på. Det kan fx dreje sig om måling af vandmængder, temperatur og planters længder. Herefter ordnes, vises og tolkes data, fx ved brug af tabeller og diagrammer. Matematikken kan på den måde bidrage til at belyse forskellige faktorerens betydning for spiring og vækst.

Eksempel 2

Et tværgående projekt på de ældste klassetrin kan vedrøre samfundets velfærdsydelser. Projektet kan både involvere samfundsfag og matematik. En del af projektet går ud på, at eleverne udarbejder en model for, hvordan børne- og ungeydelser skal fordeles i et mikrosamfund med 24 familier. Eleverne begynder med at beskrive de 24 familier med oplysninger om bl.a. økonomi, antal børn og alderen på disse børn. Derefter får de en samlet sum på fx 240.000 kr., som de skal fordele mellem familierne. Det medfører, at eleverne skal udvikle en matematisk model, som giver en fordeling af pengene, som eleverne opfatter som retfærdig. Den matematiske model, eleverne opstiller, kommer på den måde til at forme fordelingen af børne- og ungeydelser i mikrosamfundet. Elevernes arbejde kan bl.a. danne grundlag for, at eleverne forholder sig kritisk til de modeller, de opstiller.

Eksempel 3

Et tværgående projekt på de mellemste klassetrin kan opstå i forbindelse med planlægningen af en fest på skolen, hvor eleverne skal stå for et kaffe- og kagebord. Projektet trækker på både madkundskab og matematik. I denne sammenhæng kan matematik bl.a. fungere som et redskab til at anslå, hvor meget kaffe og kage der skal fremstilles, og til at justere en kageopskrift, så den passer til antallet af kager, der skal bages. Matematik kan også bidrage ved planlægningen af et indkøb, der skal holdes inden for en bestemt økonomisk ramme og til at holde regnskab med udgifter og indtægter. Eleverne kan fx bruge et regneark til planlægningen og til regnskabet.

Eksempel 4

Et tværgående projekt på de ældste klassetrin kan fokusere på spørgsmålet om, hvordan det kan lade sig gøre at begrænse mængden af affald, der forbrændes? Projektet kan trække på både samfundsfag og matematik. En del af projektet kan dreje sig om forbrug af emballage ved køb og salg af varer. Kan det samme indhold pakkes på en måde, så forbruget af emballage bliver mindre? Matematik kan bidrage til at løse dette problem. Eleverne kan bruge matematiske metoder til at undersøge, om fx emballage til mælk vil kunne begrænses, hvis emballagen havde en anden form.

Yderligere læsning: 5 Tværgående emner og problemstillinger side 53

6 Tværgående temaer

Sproglig udvikling, it og medier samt innovation og entreprenørskab er tre tværgående temaer, der indgår i undervisningen i skolens obligatoriske fag, herunder matematik. Dette kapitel er ment som inspiration til arbejdet med de tre tværgående temaer i matematik.

6.1 Sproglig udvikling

Som det fremgår af bl.a. læseplanen for matematik, omfatter sproglig udvikling som tværgående tema fire forskellige elementer: At læse, skrive, lytte og samtale. I tabel 3 er de fire elementer kategoriseret på to forskellige måder: I receptivt/produktivt sprog og i mundtligt/skriftligt sprog

Sprogets elementer

Sprog	Receptivt	Produktivt
Mundtligt	Lytte	Samtale
Skriftligt	Læse	Skrive

Det receptive element handler om, at eleverne bliver i stand til at lytte og læse sig til forståelse og tilegnelse af det faglige indhold. Det drejer sig om, at eleverne får kendskab til de fagord, begreber og det fagspecifikke sprog, der findes i faget, når det praktiseres mundtligt og skriftligt. Det produktive element handler om, at eleverne kan udtrykke sig og formidle fagligt indhold i samtale og på skrift og dermed udvikle sig til faglige, aktive sprogbrugere.

I det følgende skitseres tre forskellige tilgange, der kan supplere hinanden i arbejdet med elevernes sproglige udvikling i matematik.

At arbejde på en sproglig alsidig måde

Traditionelt har matematikundervisning typisk haft en stor overvægt på skriftligt arbejde med tal og andre symboler. Et alternativ til denne traditionelle tilgang er, at eleverne arbejder inden for et bredere sprogligt repertoire, hvor symboler optræder i sammenhæng med fx konkrete materialer, tegninger, virkelighedsnære situationer og fortællinger.

En grundlæggende idé med at arbejde på en sproglig alsidig måde er, at elever udvikler forståelse for fagets fagord og begreber ved at se sammenhænge mellem forskellige måder at repræsentere dem på. Fx kan elever på de yngste klassetrin udvikle forståelse for betydningen af regningsarterne ved at lytte til og fortælle historier om situationer, hvor en regningsart kan bruges. På tilsvarende vis kan eleverne se og vise aspekter af regningsarternes betydning med konkrete materialer, med tegninger eller med tekster, som de skriver. Disse uformelle repræsentationer kan ses i sammenhæng med de mere formelle repræsentationer, som de skriftlige symboler giver.

Forskellige repræsentationer for det samme begreb er ikke neutrale bærere af begrebet. De rummer ligheder og forskelle, fordele og ulemper. Forskellige repræsentationer kan også åbne nye perspektiver på et fagord eller et begreb. Fx kan man umiddelbart se på en grafisk repræsentation af en funktion, om den er lineær eller ikke-lineær, og om den har funktionsværdien 0 i sit domæne. Det kræver en anden form for indsigt at hente de samme informationer fra den tilhørende forskrift for funktionen. Eleverne kan ved hjælp af et dynamisk geometriprogram undersøge sammenhænge mellem de to forskellige repræsentationer for en funktion. De kan skrive om deres opdagelser, beskrive dem i klassen og begrunde dem. Sammenligningerne kan fortsætte ved at inddrage tabeller og hverdagssproglige repræsentationer for funktioner. På den måde kan begrebets funktion indgå i undervisningen på en sproglig alsidig måde.

At basere undervisningen på samtale

Matematiklæring kan forstås som en proces, der foregår gennem kommunikation mellem deltagerne i en klasse. Processen består i, at eleverne på den ene side lytter til og prøver at forstå andres forklaringer og begrundelser og på den anden side argumenterer for egne forslag til fx fremgangsmåder og løsninger. Lærerens rolle er i denne tilgang at indgå i samtale med eleverne, bl.a. ved at foreslå andre måder at betragte et problem på, stille nye spørgsmål til problemet og ved at samle op på de matematiske erfaringer, eleverne i klassen gør sig, og forbinde dem med tidligere erfaringer og faget i det hele taget.

En sådan tilgang til matematikundervisning bygger generelt på oplæg, som har en sådan grad af åbenhed, at eleverne får mulighed for at bruge forskellige indgangsvinkler, at det giver mening, at de præsenterer deres løsningsmåder og resultater, og at klassen diskuterer forskellige mulige måder at løse problemet på.

På mellemtrinet kan et sådan oplæg fx tage udgangspunkt i en figur på et sømbræt. Hvis figuren er $1/2$, hvordan kan hele figuren så se ud? Og hvad hvis figuren er $1/3$? Til disse opgaver kan eleverne fx bruge en indgangsvinkel, hvor de tænker i parallelforskydninger, drejninger eller spejlinger af figuren. En anden indgangsvinkel kan være at finde figurens areal, fordoble/tredoble det og bygge nye figurer, hvis areal er 2 og/eller 3 gange så stort som den første figurs. De forskellige mulige tilgange gør det meningsfuldt, at eleverne fortæller i klassen, hvad de har gjort, og at de efterfølgende diskuterer fx, hvor mange løsninger det er muligt at finde. Samtalen i klassen kan på den ene side give eleverne mulighed for at lytte og tale om og med matematik. På den anden side kan den give eleverne mulighed for at forstå centrale aspekter af brøkbegrebet, fx at den samme figur kan repræsentere både $1/2$ og $1/3$ af en helhed. Undervisningen kan på den måde både give eleverne mulighed for at udvikle den receptive og den produktive side af især mundtligt sprog, men også skriftsprog i form af brøknotationerne.

At arbejde med sproglig udvikling som et mål i sig selv

Matematik bidrager til elevernes alsidige sproglige udvikling, men i faget er sproglig udvikling også et mål i sig selv. De forskellige elementer af sproglig udvikling kommer således til udtryk i den matematiske kompetence kommunikation. Derfor giver det også mening at rette undervisningen mere direkte på sproglig udvikling, end det har været tilfældet i de foregående beskrivelser.

Et element af sproglig udvikling, som er sammenfaldende med et element i elevernes udvikling af kommunikationskompetence, er faglig læsning. I matematik skal eleverne både lære at afkode og læse tekster af autentisk karakter, hvori matematik indgår som redskab til formidling, og tekster, som skal understøtte deres matematiklæring.

At læse handler dels om at afkode ordene i en tekst, dels om at forstå det læste. Læsning er en aktiv proces, hvor eleverne møder matematikteksten med deres forhåndsviden om det givne indhold i teksten. Når elevernes forhåndsviden aktiveres, kan der skabes mening og sammenhæng i den læste teksts informationer. En af de faktorer, der har størst betydning for, hvad elever forstår og husker af det læste, er den forhåndsviden, som de møder

teksten med. Teksten bliver meningsfuld, når eleverne formår at knytte indholdet til det, som allerede vides om emnet. Dermed bliver det muligt for eleverne at danne mentale billeder af det læste. De mentale billeder gør det muligt at tænke matematik og udvikle begrebsforståelse.

Det er altså vigtigt, at elevernes forhåndsviden aktiveres i mødet med teksten, men det er ikke nok blot at aktivere denne viden, eleverne må også være i stand til at navigere rundt i teksten og finde sammenhæng mellem informationer på tværs af teksten og ræsonnere på baggrund af den viden, de i forvejen har med sig. For at vælge en hensigtsmæssig læsestrategi til dette er det en hjælp at have kendskab til genren. Et væsentligt spørgsmål er derfor, hvad der kendetegner tekster, der handler om matematik? Det er ikke realistisk at forestille sig, at alle matematiktekster kan karakteriseres på samme måde, men der er nogle kendetegn, som elever møder ofte i tekster om matematik. Et væsentligt træk ved matematiktekster er, at de ofte består af andet end skrevne ord – det er altså tekster, der er sat sammen af forskellige dele, fx matematisk symbolsprog, skemaer, tabeller, diagrammer, figurer, huskekasser, faktakasser, fotos, tegninger m.m. De skrevne ord kan have forskellige funktioner. Det kan være berettende fortællinger, opgaveinstruktioner, ordforklaringer m.m. Der er vigtige fagudtryk, som eleverne skal kende, men der er også visse ordsammensætninger, som bruges på en bestemt måde i faget. Eksempler kan være større end, mindre end, hvis og kun hvis ... Ligeledes har illustrationerne forskellige funktioner. Nogle skal gøre siden læsevenlig, mens andre illustrationer kan indeholde vigtige informationer eller måske ligefrem en instruktion. Det kan altså være et kompliceret, men spændende landskab at bevæge sig rundt i for eleverne.

Ofte vil faglig læsning og problemløsning med fordel foregå i et samarbejde mellem to elever. Faglig læsning i et makkerpar-samarbejde kunne foregå efter følgende opskrift:

- Læs teksten højt for hinanden (læseafkodning).
- Genfortæl teksten for hinanden (læseforståelse).
- Hvad handler teksten om, hvad er opgaven, og hvordan skal den løses (elementær læsekompetence)?
- Tegn et billede af opgaven (mental repræsentation).
- Hvilke løsningsstrategier kan vi bruge, og hvilken skal vi vælge (funktional læsekompetence og matematiske kompetencer)?
- Giv et overslag (hverdagserfaringer og talforståelse).
- Beregn resultatet (matematiske færdigheder).
- Sammenlign resultatet med overslaget og spørgsmålet (refleksion).

Yderligere læsning: 6.1 Sproglig udvikling side 53

6.2 It og medier

Som det fremgår af bl.a. læseplanen for matematik, vedrører it og medier som tværgående tema fire forskellige elevpositioner: Eleven som 1) kritisk undersøger, 2) analyserende modtager, 3) målrettet og kreativ producent og 4) ansvarlig deltager. Et undervisningsforløb kan på samme tid rette sig mod en eller flere af disse positioner. I det følgende skitseres to undervisningsforløb, hvor eleven på forskellige tidspunkter undervejs i forløbet får muligheder for at indtage en eller flere af positionerne.

Eksempel 1

En 9. klasse arbejder med meningsmålinger i forbindelse med et forestående folketingsvalg. Målet med forløbet er dels, at eleverne lærer at læse, tolke og vurdere meningsmålinger, som de forekommer i medier, dels at eleverne kommer til at forstå den usikkerhed, der er forbundet med meningsmålinger.

I begyndelsen af forløbet søger eleverne efter aktuelle meningsmålinger, som de finder på internettet. En del af disse meningsmålinger præsenteres i visualiseret form, som informationsgrafik. Forløbet begynder med, at eleverne læser, tolker og sammenligner disse meningsmålinger, der alle vedrører et kommende folketingsvalg. I den forbindelse diskuterer klassen bl.a. betydningen af den usikkerhed, der er angivet i medierne i tilknytning til tallene og diagrammerne. De diskuterer også, hvordan det kan være, at meningsmålingerne ikke viser helt de samme resultater. Eleverne indtager på den måde en rolle som analyserende modtagere.

Senere i forløbet undersøger eleverne pålideligheden af forskellige stikprøver. Som udgangspunkt har læreren medbragt en pose med et stort antal røde og hvide brikker. Han viser eleverne, at der er lige mange hvide og røde brikker i posen. Spørgsmålet er, om en stikprøve også vil vise det? I fællesskab foretager klassen stikprøver med først 10, så 20 og til sidst 50 brikker. I forbindelse med hver stikprøve diskuterer de, hvor godt stikprøven afspejler, at der er lige mange røde og hvide brikker i posen. Efterfølgende bruger eleverne et regneark, som læreren har forberedt, til at simulere flere udtrækninger med lige mange røde og hvide brikker. Eleverne undersøger, om stikprøvens størrelse har betydning for pålideligheden, ved at gennemføre simuleringer med 100 gentagelser, 500 gentagelser og 1500 gentagelser. Eleverne undersøger også, om forholdet mellem antallet af røde og hvide brikker har betydning for pålideligheden ved at gennemføre simuleringer med 40 % røde og 60 % hvide brikker, 20 % røde og 80 % hvide samt 2 % røde og 98 % hvide brikker. Efterfølgende diskuterer klassen, hvilken betydning resultaterne af deres undersøgelser har for virkelighedens meningsmålinger. Eleverne indtager på den måde en rolle som kritiske undersøgere.

Sidst i forløbet gennemfører eleverne deres egne meningsmålinger blandt eleverne på de ældste klassetrin på deres egen skole og på de andre skoler i deres by. De spørger, hvilket parti eleverne ville stemme på, hvis de havde stemmeret. Processen med at gennemføre meningsmålingerne giver i de første trin anledning til at formulere spørgsmål, til at indrette et digitalt værktøj, der kan bruges til meningsmålingen, og til at kommunikere digitalt med elever og lærere på andre skoler om sagen. Efterfølgende fremstiller eleverne digitale præsentationer af resultaterne og af de usikkerheder, der er forbundet med dem. Eleverne indtager på den måde en rolle som ansvarlige deltagere, kritiske undersøgere samt målrettede og kreative producenter.

Eksempel 2

En 6. klasse arbejder med mønstre. Et mål er, at eleverne kan genkende og bruge flytninger til at analysere og fremstille geometriske mønstre. Et andet mål er, at eleverne gennem undersøgelse kan begrunde, om en given figur kan bruges i et fladedækkende mønster.

I begyndelsen af forløbet går klassen på mønsterjagt i de lokale omgivelser og på et lokalt museum. Eleverne tager fotos af ting, de opfatter som mønstre. Efterfølgende beskriver de mønstrene i klassen og diskuterer, hvad der gør noget til et mønster. Læreren præsenterer nogle af de virkemidler, der kan bruges i mønstre. Det drejer sig om spejlinger, drejninger, parallelforskydninger og om fladedækkende flisemønstre.

Senere i forløbet lærer eleverne, hvordan de kan foretage flytninger af geometriske figurer med et dynamisk geometriprogram. De lærer også, hvordan de kan bruge programmet til at kopiere polygoner, som de efterfølgende kan flytte og dreje for at undersøge, om de bruges til at fremstille fladedækkende mønstre. Kan de konstruere et polygon, som kan dække fladen, når den kopieres og flyttes? Kan de finde et polygon, som ikke kan dække fladen? Findes der en firkant, der kan dække fladen? Kan alle firkanter dække fladen? Eleverne indtager i denne sammenhæng perspektivet som kritiske undersøgere.

Sidst i forløbet fremstiller eleverne selv mønstre ved hjælp af et dynamisk geometriprogram. De præsenterer og beskriver og diskuterer mønstrene for hinanden. I den forbindelse indtager eleverne på skift perspektiver som både målrettede og kreative producenter og analyserende modtagere.

Yderligere læsning: 6.2 It og medier side 53

6.3 Innovation og entreprenørskab

Som det fremgår af bl.a. læseplanen for matematik, har innovation og entreprenørskab som tværgående tema fire dimensioner: Handling, kreativitet, omverdensforståelse og personlig indstilling. Et undervisningsforløb kan på samme tid rette sig mod en eller flere af disse dimensioner. I det følgende skitseres to undervisningsforløb, der på forskellige måder inddrager disse dimensioner.

Eksempel 1

En 9. klasse arbejder med et modelleringsforløb. Oplægget er en problemstilling med et mejeri, der overvejer at begynde en produktion af kartoner med 1,5 liter mælk. Spørgsmålet er, hvordan kartonen skal se ud? Der skal helst ikke bruges for meget pap til fremstillingen af kartonen, og den skal være god at transportere og god at holde på, når man hælder mælk fra den. Elevernes opgave er at fremstille en model (fx en tegning) af en mælkekarton, der opfylder disse krav.

Oplægget kan give anledning til, at eleverne gruppevist diskuterer forskellige muligheder vedrørende mælkekartonens form. Hvilken form og hvilke mål kan den i det hele taget have, hvis den på samme tid skal kunne rumme 1,5 liter, forbruge lidt pap, være god at hælde af og let at transportere? Eleverne må igennem deres samarbejde både identificere muligheder og bruge kreativitet for at skabe et produkt, der, i princippet, kunne være værdifuldt for dem selv og andre.

Eksempel 2

Eleverne i en 3. klasse får til opgave at fremstille en model af deres skolegård, som de kunne tænke sig, den så ud.

I begyndelsen af forløbet arbejder klassen med at fremstille tegninger, der viser ting set fra oven. Eleverne har opmålt og tegnet deres klasseværelse set fra oven, og de har tegnet møbler på tegningen, så godt det kan lade sig gøre. Lærerne har introduceret en tændstik som en miniature-udgave af en meterstok, så eleverne kan bruge den til at tegne tingene tilnærmelsesvist i de rette forhold.

Selve skolegårdsforløbet begynder med en idéfase, hvor eleverne kommer med idéer til, hvad en legeplads skal kunne. Det kan fx tænkes, at eleverne har som de vigtigste forslag, at de skal kunne spille bold og lege fangelege, men også at der skal være plads til at hygge sig nogle få sammen eller alene.

Lærerne har på forhånd målt skolegården op og tegnet den i et passende målforhold på A2-papir. Samtidig har de lavet målepinde af lister i 10 millimeters bredde og tilpasset længdeforholdet, så de svarer til 10 meter, og underinddelt i meter. På den måde har eleverne hele tiden en fornemmelse af, hvordan deres tegnede model passer med virkelighedens verden. Når eleverne diskuterer størrelsen af en ting, kan de måle efter med en rigtig meterstok for at se, om det matcher deres idéer om størrelsen af fx et legestativ.

Det kan være svært for nogle af eleverne i 3. klasse at se den tredimensionelle virkelighed i en tegning i to dimensioner, og flere har lyst til at folde legeredskaberne ud i tre dimensioner. Spørgsmål om, hvad man kan se på en set fra oven-tegning, melder sig automatisk:

Hvordan kan man finde ud af, hvor højt klatrestativet er? Hvordan kan vi tegne, så man kan se skolegården fra flere sider?

Senere i forløbet begynder arbejdsfasen, hvor eleverne skal få deres tegnede model af skolegården til at udfolde sig i et tredimensionelt univers. Hele tiden gør elever og lærere sig tanker om modellens anvendelighed i forhold til det stykke virkelighed, de ønsker at beskrive. Samtidig handler det overordnet set om at få idéer, se og skabe muligheder samt løse problemer – det er en kreativ proces, som giver mulighed for at skabe noget, der, i princippet, kan have værdi for andre. Efterfølgende kan lærere støtte eleverne i at gøre forsøget på at få en eller flere af deres idéer omsat til virkelighed, fx ved at præsentere idéerne til legepladsen for skolens ledelse.

7 Tilpasning af undervisning til elevernes forudsætninger

Det fremgår af folkeskoleloven, at undervisningen i alle fag, udover at leve op til folkeskolens formål og øvrige mål, også skal varieres, så den svarer til den enkelte elevs behov og forudsætninger. Dette krav omtales i flere sammenhænge som princippet om undervisningsdifferentiering.

Frem til 1975 blev elever i den danske folkeskole delt efter fagligt niveau, og i perioden mellem 1975 og 1993 var det stadig en mulighed i enkelte fag, herunder matematik, at dele eleverne efter fagligt niveau på 8.-10. klassetrin. Med folkeskoleloven i 1993 blev denne form for elevdifferentiering imidlertid afløst af princippet om undervisningsdifferentiering. Lovgivningen giver ikke en egentlig definition af dette princip, men hensigten er, at den enkelte elev så vidt muligt tilgodeses i undervisningen, samtidig med at man bevarer fællesskabets muligheder.

Undervisningsdifferentiering kan ikke betragtes som en bestemt undervisningsmetode. Det er i højere grad et princip, som læreren må medtænke i tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af undervisning. Princippet kan fx have betydning for de mål, matematiklæreren formulerer, for det konkrete indhold, han vælger, og for den måde, han organiserer undervisningen på. Det er den fagprofessionelle, der, i samarbejde med ledelse og kolleger, må vurdere, hvordan han bedst tilgodeser den enkelte elev, samtidig med at fællesskabets muligheder bevares.

Dette afsnit er ment som inspiration til, hvordan matematiklæreren i praksis kan undervisningsdifferentiere.

7.1 Undervisningsdifferentiering og mål i matematik

Undervisningsdifferentiering kan bl.a. have betydning for de mål, matematiklæreren har for sin undervisning. Hvis målene skal kunne fungere som pejlemærker for undervisningen i en hel klasse, betyder det oftest, at målene skal kunne fungere i undervisningen af en elevgruppe, der kan være meget bredt sammensat fagligt og socialt. Mål giver forskellige betingelser for at favne denne bredde.

Inden for rammerne af Fælles Mål kan tre forskellige mål fx være:

- Eleverne kan addere (naturlige) to cifrede tal med støtte i egne notater.
- Eleverne kan addere (naturlige) tal større end 10 med støtte i fx konkrete materialer, tegninger eller egne noter.
- Eleverne forstår, at (naturlige) tal større end 10 kan opdeles i 10'ere og 1'ere, og kan udnytte denne forståelse til at udvikle metoder til addition.

De tre mål giver forskellige rammer for differentiering. I mål 1) er der både formuleret et talområde, som det er hensigten, at eleverne skal kunne addere indenfor, og en måde de skal arbejde på (med egne notater). I mål 2) har talområdet ikke noget loft, og der er åbnet for, at eleverne kan arbejde på forskellige måder. Mål 3) sigter i højere grad på den forståelse, det er hensigten, at eleverne skal opnå. Målet beskriver ikke, hvad eleverne skal kunne gøre med tallene.

Hvert af de tre mål giver forskellige muligheder for at konstatere, om eleverne opfylder dem. Mål 1) og mål 2) har karakter af præstationsmål. De beskriver det, man ønsker, at en elev kan sige, skrive eller demonstrere som resultat af et undervisningsforløb (se afsnit 4.4). Mål 3) har derimod karakter af mestringsmål. Det beskriver den forståelse, som man ønsker, at eleverne har opnået som resultat af undervisningen (se afsnit 4.4). Det sidstnævnte mål giver ikke, på samme måde som de to førstnævnte mål, læreren mulighed for at se, om eleven har nået målet.

En mulighed er at kombinere mestringsmål og præstationsmål i undervisningen. Dette vil sige, at et undervisningsforløb har et eller flere mestringsmål, som er fælles for alle eleverne i klassen, men samtidig kan læreren have forskellige forventninger til elevernes præstationer inden for dette mestringsmål. Man kan fx forestille sig, at mål 3) er et fælles præstationsmål for eleverne i en 2. klasse. Inden for dette mål forventer læreren, at nogle elever bliver i stand til at addere to cifrede tal med støtte i konkrete materialer, tegninger eller egne noter, mens han forventer, at andre elever bliver i stand til at addere vilkårligt store tal med støtte i egne noter.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvad tænker I om sammenhængen mellem mål og undervisningsdifferentiering?

7.2 Undervisningsdifferentiering og aktiviteter i matematik

Undervisningsdifferentiering kan bl.a. have betydning for de aktiviteter, der indgår i undervisningen. Her er tre forskellige oplæg til aktiviteter, der har forskellige grader af åbenhed:

- Hvilke af figurerne er ligedannede? Hvad er målforholdet mellem de ligedannede figurer?
- Tegn to ligedannede trekanter i målforholdet 2:3.
- Tegn figurer, der er ligedannede. Skriv målforholdet mellem figurerne. Brug 20 minutter.

Aktivitet 1) er lukket. Oplægget kræver noget ganske bestemt af eleverne og rummer på den måde ikke så store muligheder for, at forskellige elever kan blive udfordret på forskellige måder. Aktivitet 2) har en vis grad af åbenhed, fordi eleverne selv kan bestemme, hvilken form de omtalte trekanter skal have. Man kan forestille sig, at nogle elever vil foretrække at begynde med at tegne en retvinklet trekant, hvis kateter har heltallige sidelængder, fordi det vil gøre det lettere at beregne sidelængderne på den anden trekant. Men oplægget kræver også, at eleverne tegner trekanterne i en bestemt målforhold, hvilket måske vil være vanskeligt for nogle elever og uproblematisk for andre. Aktivitet 3) er endnu mere åben. Her er det både op til de enkelte elever at bestemme, hvilke figurer de vil tegne, og hvilket målforhold de vil tegne figurerne i.

De tre eksempler giver således forskellige muligheder for undervisningsdifferentiering. Hvis læreren gerne vil bruge fælles aktiviteter til en hel klasse, kan man mene, at aktivitet 3) giver de bedste muligheder. Eleverne kan arbejde med oplægget på forskellige niveauer, og det vil give mening, at de efterfølgende præsenterer og diskuterer deres arbejde fælles i klassen. På den måde bevares fællesskabets muligheder for, at eleverne beskriver,

forklarer, argumenterer, begrundet og diskuterer faglige aspekter. En faglig samtale med sådanne elementer vil give andre – formentlig bredere – læringsmuligheder end oplæg 1) og 2).

Til gengæld kan man mene, at oplæg 3 ikke har samme klarhed over sig som oplæg 1) og 2). I oplæg 3) bliver eleverne stillet over for en åbenhed, som gør, at de i højere grad skal kunne handle på egen hånd. Er det en fordel eller en ulempe? En mulighed kunne jo også være, at eleverne ikke arbejder med de samme aktiviteter, men med forskellige aktiviteter, der er formuleret med de samme præcise krav som aktivitet 1) og 2).

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvordan kan aktiviteter i matematikundervisningen give de bedste muligheder for undervisningsdifferentiering?

7.3 Undervisningsdifferentiering og organisering af matematikundervisning

Valg af organisationsformer er endnu et område, som har betydning for lærerens mulighed for at differentiere undervisningen. Differentieringsmuligheder kan fx opstå ved at organisere undervisningen på en måde, som giver læreren mulighed for i perioder at tale med én eller få elever ad gangen længe nok til at kunne sætte sig ind i den enkelte elevs tænkning.

Mange matematiklærere har især på begynder- og mellemtrinnet oplevet, at det kan være vanskeligt at få denne tid sammen med enkeltelever eller med få elever ad gangen. Især kan det være problematisk, hvis mange elever har brug for hjælp på samme tid. Læreren kan hurtigt blive til en person, der springer rundt i klassen og kun når at give få informationer, inden han eller hun må videre til den næste, der har brug for hjælp.

For at imødekomme dette problem kan det fx være en mulighed at organisere undervisningen, så eleverne i perioder arbejder i grupper. En klasse med 24 elever kan fx deles i fire grupper, der ikke har den samme aktivitet. På den måde kan det planlægges, at lærerens hjælp er koncentreret omkring de grupper, som arbejder med opgaver, der kræver meget hjælp – eller med opgaver, som giver gode muligheder for, at læreren kan sætte sig ind i elevernes tænkning.

Organisationen i grupper – eller i værksteder – giver også mulighed for, at eleverne kan arbejde med forskellige tilgange til det samme faglige emne. I 6. klasse kan det fx tænkes, at nogle elever har særlig glæde af at arbejde med ligningsløsning ved hjælp af fysiske handlinger med konkrete materialer, mens andre arbejder med ligninger med støtte i illustrationer, og andre igen arbejder med ligninger med udgangspunkt i det matematiske symbolsprog.

I perioder eller sekvenser, hvor undervisningen baserer sig på klassens dialog, er det naturligvis oplagt, at klassen arbejder samlet med læreren som leder. Læreren har i denne organisationsform mulighed for at inddrage elevernes forskellige input i dialogen ved fx at spørge, reformulere og konkludere på baggrund af elevernes input. I en sådan undervisning bidrager elevernes forskellighed til at lægge forskellige perspektiver på den faglige samtale.

Til overvejelse i matematikfaggruppen

- Hvilke organisationsformer i matematikundervisningen giver, efter jeres opfattelse, gode differentieringsmuligheder?

7.4 Elever med særlige behov i matematik

I en normal klasse vil der oftest være meget stor forskel mellem elevers præstationer i matematik.

Forskning tyder på, at variationen øges igennem skoleforløbet. En undersøgelse fra Sverige har således vist, at omkring 15 % af eleverne i 9. klasse ser ud til at have en matematisk færdighed og forståelse, der svarer til gennemsnittet i 4. klasse. Undersøgelsen kan tyde på, at nogle elever næsten stagnerer i deres faglige udvikling. En del af forklaringen på dette kan være, at eleverne har mistet motivationen for matematik og måske ligefrem har udviklet matematikangst.

Netop risikoen for at elever kan miste motivationen eller udvikle matematikangst, har i de senere år været en hovedbegrundelse for at igangsætte en række projekter, der har sigtet på at yde en tidlig indsats rettet mod de elever, der præsterer svagest i matematik. Projekterne har fokuseret på at:

- Identificere forståelser/misforståelser, opfattelser/misopfattelser og holdninger til faget hos elever, der præsterer svagt i matematik.
- Igangsætte en særlig indsats, der er tilpasset den enkelte elev.

Erfaringer fra sådanne projekter tyder generelt på, at en tidlig og intensiv indsats i matematik kan betyde en accelereret matematiklæring hos de elever, der præsterer svagest. På baggrund af projekterne findes der i dag en række materialer, som kan støtte lærerens arbejde med de to punkter. Den særlige indsats, som igangsættes på baggrund af punkt 1), foregår ofte i intense forløb over få uger med enkelte elever eller med en lille gruppe af elever. Indsatsen rækker således ud over den normale undervisning og kræver en særlig organisering.

Der findes også elever med et særligt talent for matematik. Sådanne elever kan på den ene side være kreative, opfindsomme, nysgerrige og videbegærlige børn, men på den anden side tyder forskning på, at sådanne elever samtidig kan opleve udfordringer i det sociale skoleliv, være underydere eller mangle motivation. Sådanne elever kan med andre ord også have behov for en særlig indsats. I forslagene til yderligere læsning omtales nogle af disse projekter.

Til overvejelse i faggruppen

- Hvordan identificerer vi på vores skole de elever, der præsterer svagest, og de elever, der er særlige talenter i matematik?
- Hvordan støtter vi disse elevgruppers matematiklæring?

Yderligere læsning: 7.4 Elever med særlige behov i matematik side 53

Yderligere læsning

Side 8:

3.1 Om færdigheder, viden og kompetencer:

Niss, M., Højgaard, T. (2002). Kompetencer og matematiklæring. Lokaliseret april 2019. <http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf>

Højgaard, T. (2008). Kompetencer, færdigheder og evaluering. Lokaliseret april 2019. <https://pure.au.dk/ws/files/247/THJ08-Matematik-komp-evaluering.pdf>

Side 9:

3.2 De matematiske kompetencer:

Niss, M., Højgaard, T. (2002). Kompetencer og matematiklæring. Lokaliseret april 2019. <http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf>

Sølberg, J., Bundsgaard, J., & Højgaard, T. (2015). Kompetencemål i praksis – hvad har vi lært af KOMPIS?. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (2). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36308>

Blomhøj, M., Skånstrøm, M. (2002). Matematikmorgner. Et udviklingsarbejde. Lokaliseret april 2019: <http://www.mikaelskaanstroem.dk/pdf/Matematikmorgener.pdf>

Side 31:

4.2 Om at gennemføre matematikundervisning:

Hansen, R., Hansen, P. (2013). Undersøgelsesbaseret matematikundervisning. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (4). Lokaliseret april 2019 <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36061>

Larsen, D.M., Lindhart, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematik undervisningen på mellemtrinnet. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, 2019(1), 7-21. Lokaliseret april 2019 <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/112811>

Johansen, M., & Misfeldt, M. (2014). Når matematikere undersøger matematik – og hvilken betydning det har for undersøgende matematikundervisning. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (4). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36280>

Skånstrøm, M., Blomhøj, M. (2016). Det kommer an på... Lokaliseret april 2019: https://ucc.dk/sites/default/files/det_kommer_an_paa.pdf

Side 34

4.2 Om at gennemføre matematikundervisning:

Alrø, H., Skovsmose, O. Undersøgende samarbejde i matematikundervisning. Lokaliseret april 2019: <http://mat-didaktik.dk/wp-content/uploads/2018/11/Kunne-det-t%C3%A6nkes-s110-126.pdf>

Side 37:

4.3 Om evaluering i matematikundervisning:

Højgaard, T. (2008). Kompetencer, færdigheder og evaluering. Lokaliseret april 2019. <https://pure.au.dk/ws/files/247/THJ08-Matematik-komp-evaluering.pdf>

Jess, K. (2006). Konsekvenser af evaluering i matematikundervisning. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (2). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36444>

Side 40:

4.4 Om måls rolle i tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering:

Hansen, R. (2015). At styre efter målet i matematik - hvad ved vi egentlig om elevers og læreres målorientering?. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (1). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36293>

Mogensen, A. (2013). Når pointer styrer matematikundervisning. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (3). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/35969>

Side 42:**5 Tværgående emner og problemstillinger:**

Spahn, K.S., Vestergaard, A. (2018). Matematik skal mere end at levere M'et i STEM. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, 2019(1), 7-21. Lokaliseret april 2019 <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/111347/160395>

Side 45:**6.1 Sproglig udvikling:**

Andersen, M. W. (2008). Matematiske billeder, sprog og læsning. Lokaliseret april 2019. <http://mat-didaktik.dk/wp-content/uploads/2018/11/Matematik-og-læsning.pdf>

Side 46:**6.2 It og medier:**

Mogensen, A., Bull, A., & Hansen, M. (2016). CAS i folkeskolens matematikundervisning med øget læringsudbytte for drenge på mellemtrinnet. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (1). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36366>

Misfeldt, M. (2014). Trekantsberegninger og teknologi – et eksempel på hvordan teknologi har (eller bør have) indflydelse på udvikling af Matematikcurriculum. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (1). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36192>

Side 51:**7.4 Elever med særlige behov i matematik:**

Schmidt, M. (2016). Når matematikvanskeligheder bliver usynlige for lærerne – om klasseledelse og elevdeltagelse i inkluderende undervisning. MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, (3). Hentet fra <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36406>

Lindenskov, L., Weng, P. (2010). Tidlig matematikindsats på Frederiksberg, TMF. Matematik (3). 2010. Lokaliseret april 2019: http://pure.au.dk/portal/files/41902058/Matematik_2010_3_Tidlig_matematikindsats_p_Frederiksberg_TMF.pdf

Professionshøjskolen Metropol, Aarhus Universitet (2016). TMTM2014. Tidlig matematikindsats til marginalgruppeelever. Lokaliseret april 2019: <https://www.egmontfonden.dk/Upload/Egmontfondendk/PDF-filer/TMTM2014%20afrapportering%208%20dec%202016.pdf>

Mogensen, A. (2005). Dygtige elever - en faglig udfordring i matematik. Aarhus: Aarhus Kommunale Skolevæsen og Aarhus Dag- og Aftenseminarium. Lokaliseret april 2019: [https://www.ucviden.dk/portal/da/publications/dygtige-elever--en-faglig-udfordring-i-matematik\(2091079f-637f-4ab7-9a33-24b2942d5293\).html](https://www.ucviden.dk/portal/da/publications/dygtige-elever--en-faglig-udfordring-i-matematik(2091079f-637f-4ab7-9a33-24b2942d5293).html)

Nissen, P., Balzer, K. (2011). Talentklasser i skolen - en effektundersøgelse. Lokaliseret april 2019: http://www.dpu.dk/fileadmin/www.dpu.dk/centerforgrundskoleforskning/artikel/Nissen__Baltzer__2011__Talentklasser_i_folkeskolen_-_en_effektundersoegelse.pdf

Matematik – Undervisningsvejledning

2019

Design: BGRAPHIC

Denne publikation kan ikke bestilles.
Der henvises til webudgaven.

Publikationen kan hentes på:

www.emu.dk

Børne- og Undervisningsministeriet
Styrelsen for Undervisning og Kvalitet
Frederiksholms Kanal 26
1220 København K



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET

