Ræsonnement ved mundtlig eksamen på A-niveau

Afklaring, eksempler og inspiration

Rapporten er et produkt af et udviklingsprojekt etableret under Matematiklærerforeningen i samarbejde med fagkonsulenten i matematik for stx og hf

Juni 2020

Indholdsfortegnelse

Indledning 2

Spørgsmål 1: Differentialregning og harmoniske svingninger 5

Spørgsmål 2: Funktioner og differentialregning 7

Spørgsmål 3: Integralregning og funktionsteori 9

Spørgsmål 4: Integralregning 11

Spørgsmål 5: Sandsynlighedsregning og statistik 13

Spørgsmål 6: Sandsynlighedsregning 15

Spørgsmål 7: Sandsynlighedsregning 17

Spørgsmål 8: Normalfordelingen og funktionsundersøgelse 19

Spørgsmål 9: Repræsentationsformer 21

Spørgsmål 10: Funktioner og vektorer 23

Spørgsmål 11: Vektorfunktioner 25

Spørgsmål 12: Funktioner af to variable og optimering 27

Spørgsmål 13: Funktioner af én og to variable 29

Spørgsmål 14: Funktioner af to variable 31

Spørgsmål 15: Funktioner og differentialregning 33

Spørgsmål 16: Matematisk modellering 35

Spørgsmål 17: Matematisk problembehandling 37

Spørgsmål 18: Ræsonnementskompetence 39

Spørgsmål 19: Matematikkens videnskabsteori 41

Indledning

Den her foreliggende samling af ideer til spørgsmål ved den mundtlige prøve i matematik (STX) på A-niveau, skal ses i forlængelse af den tidligere udsendte rapport[1] ”Ræsonnement ved mundtlig eksamen på B-niveau”.

Formålet med denne samling er dels at give eksempler på, hvordan spørgsmål ved den mundtlige prøve på A-niveau kan formuleres, uden at have et meget direkte fokus på klassiske ”sætning-bevis”-strukturer, dels at give eksempler på spørgsmål i læreplanens nye emner. Læreplanen (2017) skriver om den mundtlige prøve:

> *»Grundlaget for den mundtlige prøve er en række spørgsmål formuleret af eksaminator med fokus på matematisk ræsonnement og bevisførelse.«*

Den mundtlige prøve har altså fokus på elevens evne til at udføre matematiske ræsonnementer, herunder på evnen til at føre et bevis. Det betyder imidlertid ikke, at ethvert spørgsmål skal indeholde opdrag på den klassiske form: ”Giv et bevis for sætning X.” hvor sætning X står opskrevet i lærebogen, med et tilhørende bevis.

Det betyder omvendt heller ikke, at et eksamensspørgsmål ikke kan være på klassisk form. Det mest hensigtsmæssige er en blanding af klassiske spørgsmål og spørgsmål af en anden art, som foreslået her.

Samlingen her giver eksempler på spørgsmål, der er formuleret anderledes end på den klassiske form. Det er således intentionen at give ideer til, hvordan et spørgsmål *også* kan se ud, idet den klassiske form omtalt ovenfor, antages velkendt af alle undervisere i matematik.

Om udformningen af spørgsmål til den mundtlige prøve, siger læreplanen (2017):

> *De enkelte spørgsmål skal udformes med en overskrift, der angiver det overordnede emne for eksaminationen, og konkrete delspørgsmål samt et ukendt bilag, der perspektiverer emnet.«*

Vejledningen (2020, s.35) præciserer at »*overskriften danner rammen for den faglige samtale, mens de konkrete delspørgsmål skal besvares gennem eksaminandens præsentation, som i udgangspunktet skal være selvstændig*«.

[1] Rapporten kan hentes på: http://lmfk.dk/pics/1320.pdf

En klassisk overskrift på et spørgsmål er et velafgrænset stofområde, som f.eks. ”Integralregning” eller ”Normalfordeling”. Sådanne overskrifter er velfungerende, fordi overskriften skal være så bred, at den muliggør en samtale med større bredde, end det de konkrete delspørgsmål i sig selv lægger op til.

Vejledningen (2020) siger i forlængelse af ovenstående følgende:

> »*Spørgsmålene må gerne inddrage stof fra flere ’søjler’ og tage udgangspunkt i et projekt, der repræsenterer en ’bro’. Spørgsmålene må også gerne tage udgangspunkt i en overordnet kompetence eller en mindstekravskategori, der indgår i flere faglige stofområder.*«

Det er således et supplerende mål med nærværende samling af spørgsmål at give eksempler på, hvordan man kan lave spørgsmål der tager afsæt i flere søjler samt i en overordnet kompetence, mens spørgsmål knyttet til ”mindstekravskategorier” i højere grads finder anvendelse på C-niveau.

Uanset hvilken type spørgsmål der stilles, afspejler spørgsmålene altid den faktiske undervisning på holdet. Det er altså de valg, der træffes af holdet og underviseren undervejs, som skaber grundlag for de stillede spørgsmål. Spørgsmål på tværs af de faglige søjler, f.eks. med fokus på en overordnet kompetence, afspejler altså, at der forud er gennemført undervisning med kompetencen i fokus.

Vejledningen (2020) fastlægger betydningen af to centrale typer af opdrag i eksamensspørgsmål. Dels *forklaring*, som er et ønske om, at der fortælles overfladisk om et lidt bredere emne. Dels *redegørelse*, som er et ønske om, at noget præsenteres med dybde. Disse to ord er søgt brugt i spørgsmålene. Det er således typisk ordet ”redegør”, der udpeger det eller de centrale ræsonnementer, som trækker besvarelsen af spørgsmålet op på højeste taksonomiske niveau.

På A-niveauet hører der til alle eksamensspørgsmål et bilag, som skal inddrages i den faglige samtale. Der er således til hvert spørgsmål i denne samling givet et forslag til, hvordan et bilag til pågældende spørgsmål kan se ud. Ifølge vejledningen (2020, s.38) gælder:

> »*De ukendte bilag skal perspektivere spørgsmålet gennem billeder, figurer, grafer, tabeller, formler, kort, overskuelig tekst og lignende. Bilag må gerne være digitale. Bilag kan også være fysiske genstande, fx 3D-print.*«

Bilag skal altså sikre at eksamensspørgsmålets emne kan foldes ud. Det bør således række ud over de konkrete delspørgsmål. Samtidig er det hensigtsmæssigt, at bilaget gør det muligt for eleven at inddrage flere repræsentationsformer, og at bilaget lægger op til en faglig samtale på forskellige taksonomiske niveauer. Altså både noget til den stærke og den svage elev. Det er ikke et krav at eleven i samtalen når at tale om alt på bilaget. Det er således eksaminator og censors ansvar, at der samtales om de dele af bilaget, som er nødvendige for bedømmelsen af eleven.

Den mundtlige delprøve er i kendt stof. At bilaget er ukendt betyder ikke, at det skal indeholde nyt stof. Tværtimod. Bilaget skal fremgå genkendeligt for eleven og indholdet kan sagtens være valgt fra indholdet i undervisningen, f.eks. figurer fra et projekt eller lignende. Bilaget kan også lægge op til samtale om små beviser eller andre ræsonnementer. Et trykt bilag bør almindeligvis kun udgøre én enkelt side, men det kan med fordel trykkes på et større papirformat, f.eks. A3.

Et eksamensspørgsmål skal opfattes som én samlet helhed bestående af ”overskrift”, ”konkrete delspørgsmål” og ”bilag”. På store hold, hvor spørgsmål dubleres, er det således denne samlede helhed der dubleres. Før eksamen er det kun overskrift og delspørgsmål, der må være kendte for eleven. Bilaget gives først til eleven under eksaminationen, som en del af den faglige samtale. Da bilagene dubleres sammen med spørgsmålene, bør bilag indsamles ved hver enkelt eksaminations afslutning, så de ikke kommer i omløb.

De faglige emner for de konkrete eksempler på spørgsmål, som gives her, er som udgangspunkt valgt inden for kernestoffet. Til eksamen skal der naturligvis også stilles spørgsmål i det supplerende stof, men her har vi ønsket at minimere antallet af ”specielle valg”, som en underviser skal have foretaget i undervisningen, for at kunne stille spørgsmålet.

Til hvert af de her foreslåede spørgsmål har vi knyttet en kort faglig/didaktisk kommentar, hvor overvejelserne bag spørgsmålet og det tilhørende bilag præsenteres. Heraf fremgår det almindeligvis, hvis spørgsmålet trækker på et særligt undervisningsindhold.

Spørgsmålene er udarbejdet af en arbejdsgruppe nedsat af Matematiklærerforeningen og fagkonsulenten i fællesskab. Arbejdsgruppen har arbejdet i foråret 2020. Arbejdsgruppen bestod af:

Bodil Bruun
Christina Cæsarsen
Jes Sixtus Jørgensen
Kasper Bjering Søby Jensen
Katja Kofod Svan
Olav Lyndrup
Troels Roussau Johansen

Matematiklærerforeningen 2020

Spørgsmål 1: Differentialregning og harmoniske svingninger

Forklar om forskrift og graf for harmoniske svingninger og udled differentialkvotienten for en harmonisk svingning.
Redegør for differentialkvotienten for funktionen $f(x) = \sin(x)$.

Faglig/didaktisk kommentar

Spørgsmålet viser, hvordan differentialregning kan indgå i mundtlig eksamination på A niveau.

Under den første del af besvarelsen er det oplagt at koble harmoniske svingninger til sammensatte funktioner i forbindelse med argumentation for differentialkvotient for harmonisk svingning.

Spørgsmålet giver desuden anledning til mulige tilgange til besvarelsen, da eleven under redegørelsesdelen kan vælge en algebraisk, geometrisk eller eksperimentel tilgang, afhængigt af hvordan emnet er behandlet i undervisningen.

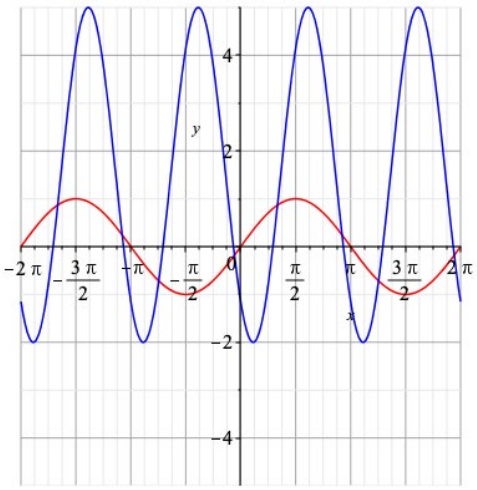
Med bilaget er det forsøgt at få så mange repræsentationer så muligt i spil, samt at have elementer, der henvender sig til eleven på forskellige taksonomiske niveauer.

Tabellen i bilaget henvender sig til den svage elev, hvor man kan spørge ind til andre trigonometriske funktioner ud over sinus, samt grafforskydninger.

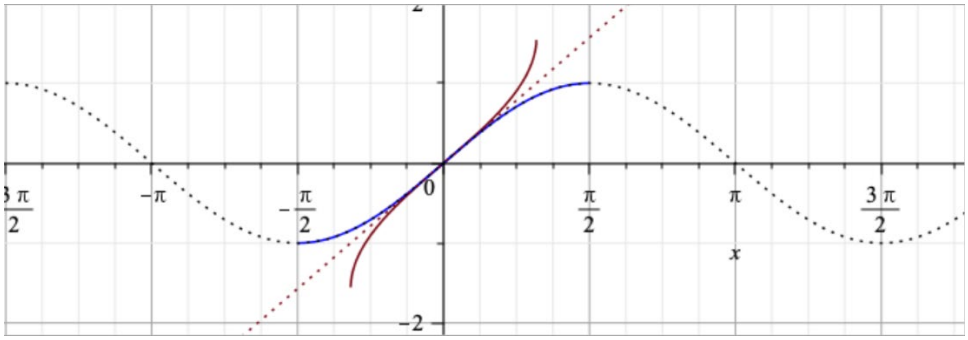
Bilaget indeholder også en figur, hvor grafen for $\sin(x)$ og $\sin^{-1}(x)$ er tegnet. Her tænkes, at eleven vil gennemskue, at den røde graf repræsenterer den omvendte funktion af sinus, samt at argumentere for definitionsmængden for sinus, således at dens omvendte funktion eksisterer.

Da trigonometriske funktioner indgår i kendte parameterfremstillinger kan disse også være en del af samtaledelen i forbindelse med bilaget. Her er der valgt parameterfremstilling for cirklen.

Bilag – Differentialregning og harmoniske svingninger



grader	0°	30°	45°	60°	90°
radiantal	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–



Hvilken figur frembringer denne parameterfremstilling?

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(t) + x_0 \\ r \cdot \cos(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ -r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Spørgsmål 2: Funktioner og differentialregning

Forklar om polynomier, herunder særligt andengradspolynomiet. Redegør for tredjegrads-polynomiet, herunder vendepunkt og antal stationære punkter samt karakteren af disse.

Faglig/didaktisk kommentar

Spørgsmålet kunne i sit rent faglige indhold godt stilles på B-niveau, men løftes til A-niveau på grund af den problembehandlingskompetence der må udfoldes, hvis redegørelsen for tredjegradspolynomiet skal være af passende stringent karakter.

I kompetencetermer er der altså ikke noget på et *teknisk niveau* højere end B-niveauet, men den måde som teknikken skal aktiveres på, ligger klart over hvad der kan forventes på B-niveau.

For $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kan eleven (via diskriminant for $f'(x)$) argumentere for at karakteren af f afgøres ved en sammenligning af b^2 og $3ac$.

- For $b^2 > 3ac$ fås to stationære punkter ved $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. Det kan vises at disse er lokale ekstrema f.eks. ud fra f'' eller ved at betragte fortegn for f' (afhængigt af fortegn for a).
- For $b^2 = 3ac$ fås ét stationært punkt ved $x = -\frac{b}{3a}$. Det kan vises at grafen har vandret vendetangent i dette punkt, ved at betragte fortegn for f' (afhængigt af fortegn for a).
- For $b^2 < 3ac$ fås ingen stationære punkter.
- I alle tre situationer kan vises, at f har vendepunkt i $x = -\frac{b}{3a}$, f.eks. ved ud fra f at betragte om tangenthældningerne er voksende hhv. aftagende (og at dette skifter netop hér).

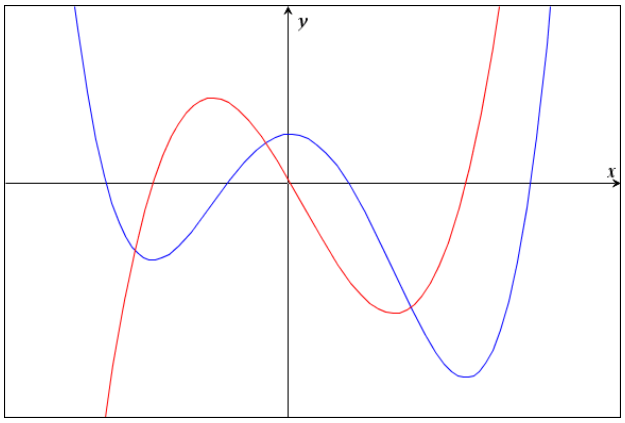
Eleven kan endvidere reflektere over muligheden for at bestemme nulpunkter. Generelt kan der jo ikke løses tredjegradsligninger i gymnasiet, men i visse "pæne" tilfælde, kan det alligevel lade sig gøre. F.eks. for $d = 0$ eller hvis der gælder både $b = 0$ og $c = 0$.

Den svage elev kan reflektere ved hjælp af grafer for f og f', frem for algebraisk udledning.

Hvis man ønsker at tilføje yderligere elementer til selve spørgsmålet, kunne der – hvis man har arbejdet med det – kræves en særskilt omtale af *krumningsforhold*.

Det er også muligt at bede om et bevis for eksempelvis differentialkvotienten til x^3, hvis der skal et mere klassisk element ind over.

Bilag - Funktioner og differentialregning

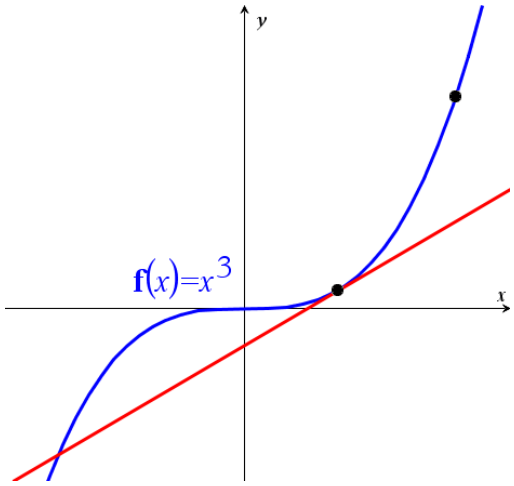


x		1		4		9	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Grafen for $f(x) = x^3$ med en tangent indtegnet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Spørgsmål 3: Integralregning og funktionsteori

Forklar om begreberne stamfunktion (ubestemt integral) og arealfunktion. Definér den naturlige logaritmefunktion ved hjælp af integralregning og gør rede for produktreglen for logaritmer.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven forventes ud fra definitionen

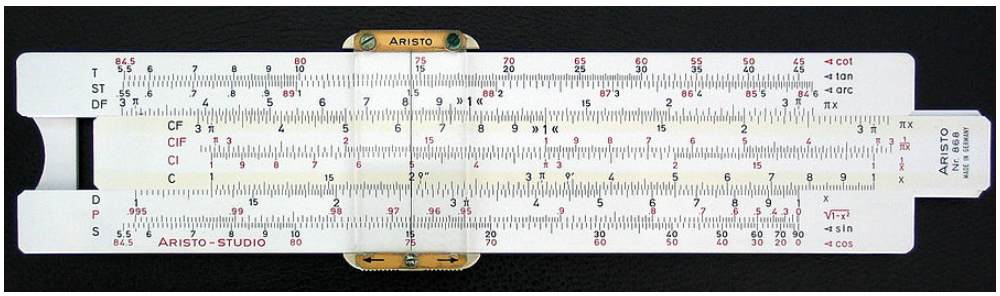
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

at udlede, at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ og $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. En vigtig regneregel er, at $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$, og de to første figurer i bilaget omhandler denne regel. Hvis det er blevet nævnt i undervisningen, kan eleven udregne noget a lá $3{,}7 \cdot 1{,}25$ på den medbragte regnestok.

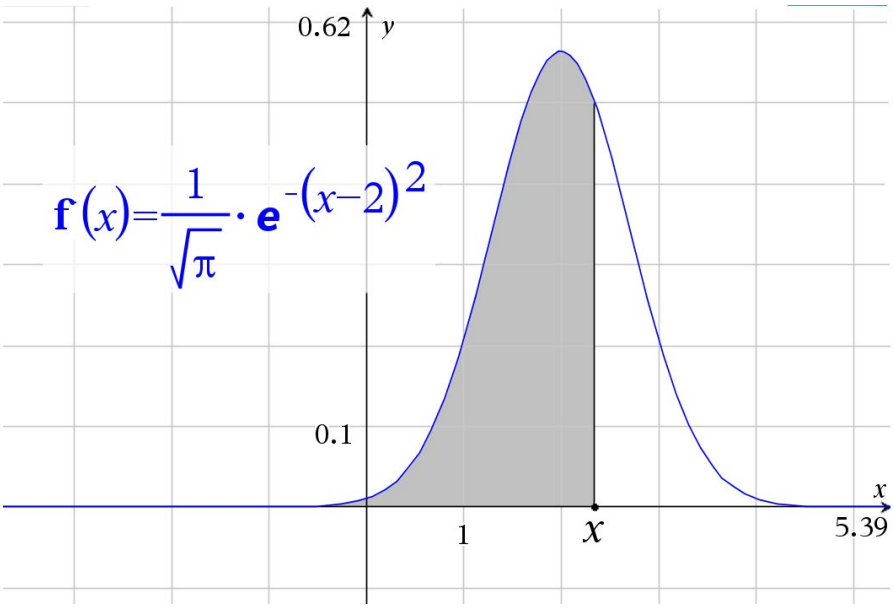
Selv uden en stram Sætning-bevis gennemgang, er der en del gode ræsonnementer af varierende sværhedsgrad. Det overordnede tema i bilaget er ”funktioner defineret ved hjælp af integraler”, og nogle af de egenskaber, man ”let” kan bevise vha. integralregningens hovedsætning. Den sidste figur inklusiv efterfølgende formel skal antyde, at man ved at differentiere fordelingsfunktionen F kan udtale sig direkte om egenskaber for den tilgrundliggende normalfordeling, herunder parallelforskydning af grafer, og symmetriegenskaber.

Bilag- Integralregning og funktionsteori

$$ln(6) = ln(1) + ln(2) + ln(3)$$



Kilde: https://da.wikipedia.org/wiki/Regnestok



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-2)^2} dt$$

Spørgsmål 4: Integralregning

Forklar hvordan stamfunktioner og integraler kan benyttes til arealbestemmelse, kom herunder ind på areal under og mellem grafer for funktioner samt arealer afgrænset af en banekurve.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven forventes at argumentere for hvordan man bestemmer arealer under grafer for kontinuerte ikke-negative funktioner (når det antages at arealfunktionen er en stamfunktion). Det er ikke tanken, at han/hun i spørgsmålet skal bevise integralregningens hovedsætning. I argumentationen kommer han/hun også ind på antallet af stamfunktioner.

Der argumenteres for hvordan arealet mellem grafer bestemmes (herunder også arealer over grafer for negative funktioner). Eleven kan evt. komme ind på regneregler for bestemte integraler.

Eleven kan evt. selv vælge et eller flere eksempler, hvormed formlerne kan demonstreres.

Det er ikke tanken, at formlen til bestemmelse af arealet afgrænset af banekurver bevises, men det forklares hvordan den anvendes. Hermed kommer eleven omkring parameterfremstillinger for vektorfunktioner, omløbsretning, differentiation af vektorfunktioner, tværvektor samt prikprodukt.

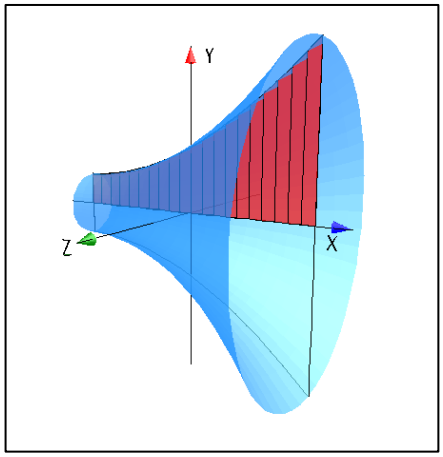
Bemærk, at arealet af et område afgrænset af en banekurve ikke er kernestof.

Det er ikke tanken, at eleven formelt skal udlede formlerne for kurvelængde og rumfang i bilaget, men blot skitsere hvorfor integranden for hver af dem giver mening, og dermed hvorfor formlen giver mening.

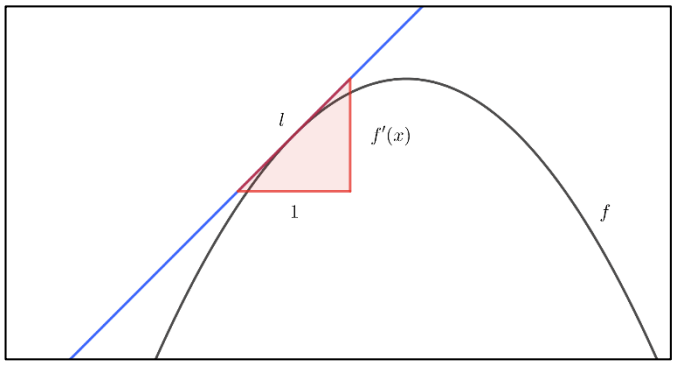
Ballonen medbringes fysisk, og inddrages som eksempel på modellering med integralregning (rumfangsbestemmelse).

Den allersidste figur kan eleven have omtalt i selve spørgsmålet, men typisk vil eleven vælge et eksempel, hvor begge grafer befinder sig over x-aksen. Derfor er figuren medtaget.

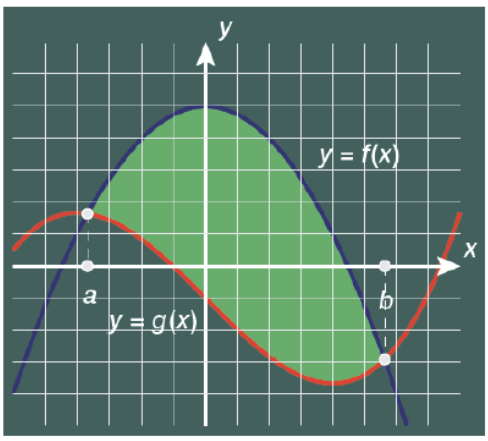
Bilag - Integralregning



$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$



Spørgsmål 5: Sandsynlighedsregning og statistik

Forklar, hvordan konfidensintervaller optræder og anvendes i statistiske undersøgelser i forbindelse med henholdsvis opinionsundersøgelser og statistisk modellering med lineære sammenhænge (data vedlagt i Excel-filen Bilag - 5 - sandsynlighedsregning og statistik.xlsx). Udled formlen for den statistiske usikkerhed på et 5% signifikansniveau ved en stikprøve med n elementer:

$$\Delta\hat{p} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

Bemærk at data-filen er vedhæftet PDF-filen i Excel-filen
Bilag 5 - Sandsynlighedsregning og statistik.xlsx.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven forventes at kunne forklare begrebet 95%-konfidensinterval ud fra den viste opinionsundersøgelse og den viste statistiske modellering ved lineær regression på en 'datapunktsky'. Eleven forventes at skitsere både problem og løsning (black-box-CAS) samt formulere en konklusion, som svar på problemet, ud fra de beregnede konfidensintervaller, herunder inddrage begreberne stikprøve og population samt deres indbyrdes størrelsesforhold.

Udledningen tager udgangspunkt i en normalfordelingsapproximation $N(\mu, \sigma)$ til en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n, p)$, hvor $\mu = n \cdot p$ og $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

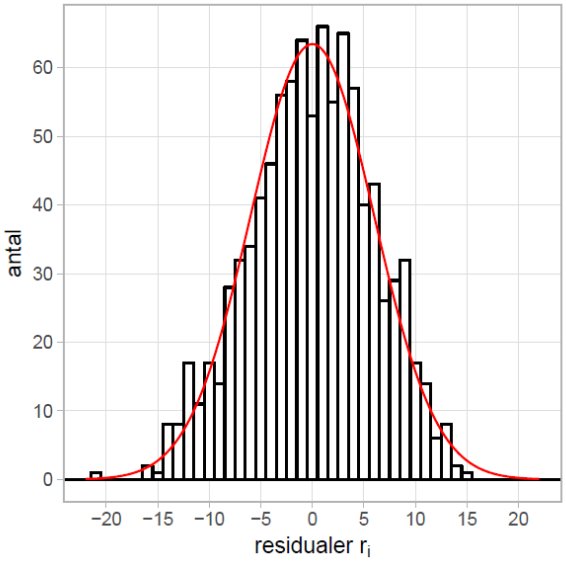
Bilaget lægger op til, at eleven kan tale om (eventuelt vise i eksemplet), at residualerne fremkommet ved en lineær regression følger en normalfordeling.

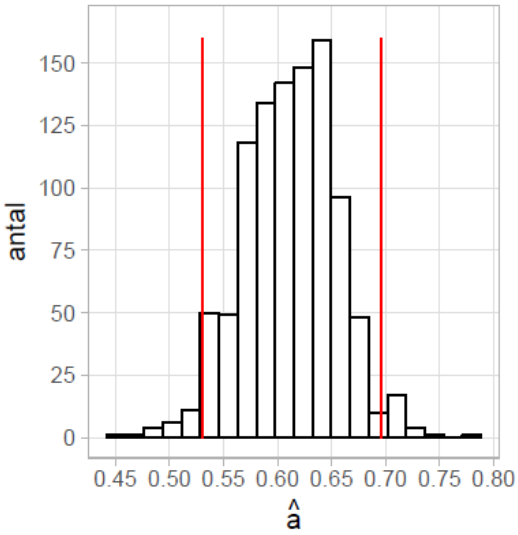
Simulering ved omrøring i det fulde datasæt fra eksemplet kan diskuteres som metode til at argumentere for rimeligheden i en lineær model til beskrivelse af data. De røde linjer på histogrammet indrammer området for de 95% midterste værdier.

En algebraisk tilgang kan bringes på banen i en argumentation for stikprøvestørrelsens betydning for den statistiske usikkerhed.

Endelig kan Anscombe's fire punktplot med tilhørende regressionslinjer være grundlag for en diskussion af den varsomhed, man bør omgås r^2 med.

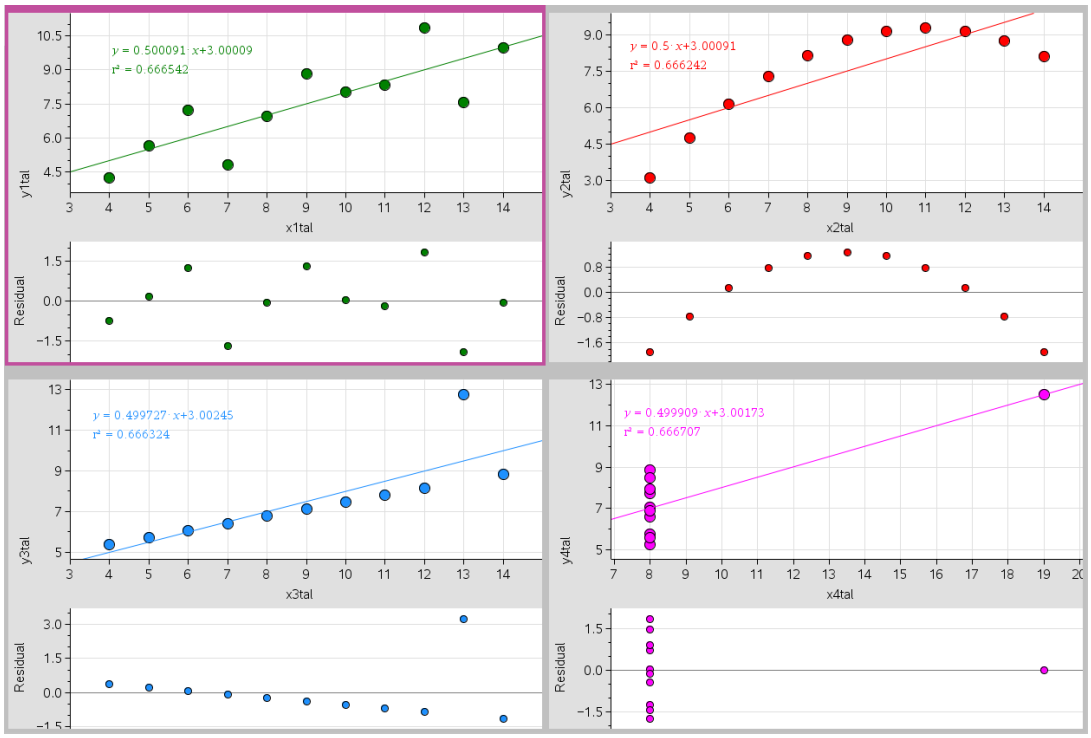
Bilag - Sandsynlighedsregning og statistik





Sætning 7: Ændring i den statistisk usikkerhed når stikprøvens størrelse fordobles

Når stikprøvestørrelsen n fordobles, så skal den statistiske usikkerhed multipliceres med $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Spørgsmål 6: Sandsynlighedsregning

Forklar om begrebet tæthedsfunktion, og beskriv de generelle krav en tæthedsfunktion skal opfylde.

Opstil specifikke kriterier for tæthedsfunktionen hørende til standardnormalfordelingen $N(0,1)$ og normalfordelingen $N(\mu, \sigma)$.

Bestem med udgangspunkt i funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ forskriften for tæthedsfunktionen hørende til normalfordelingen.

Geogebra-dokumentet, der omtales i bilaget, er vedhæftet PDF-filen under navnet
Bilag 6 - Sandsynlighedsregning.ggb

Faglig/didaktisk kommentar

I undervisningen har der været arbejdet med konstruktion af forskellige bud på tæthedsfunktioner. I den forbindelse er karakteristika for (standard-)normalfordeling blevet undersøgt. Endelig er der argumenteret for normalfordelingens tæthedsfunktion ved at anvende teori om parallelforskydning og betydningen af at gange variablen i en funktion med en faktor.

De kriterier, der hentydes til i spørgsmålet er, at grafen for tæthedsfunktionen er klokkeformet, symmetrisk om middelværdien og at tæthedsfunktionen har globalt maksimum i middelværdi.

I den sidste del skal eleven beskrive, hvordan middelværdi og spredning indføjes i tæthedsfunktionen, så kravene til tæthedsfunktionen for normalfordeling overholdes.

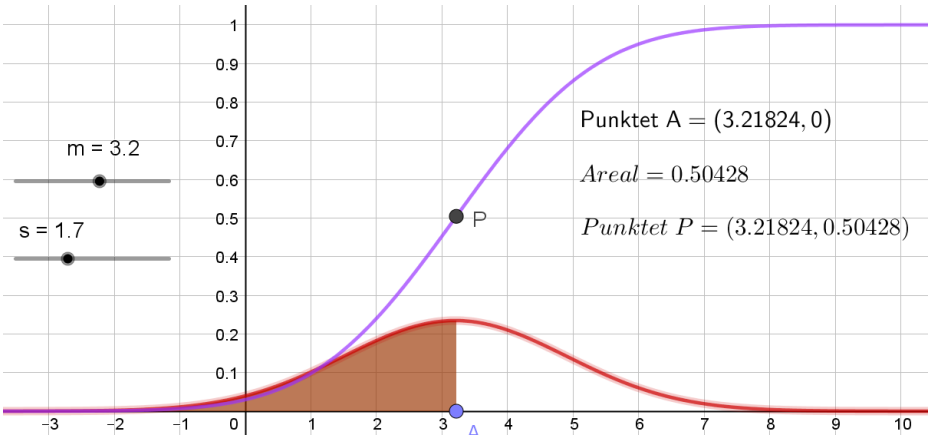
Den gode elev vil, når tæthedsfunktionen er bestemt, tjekke om i hvert fald nogle af kriterierne for standardnormalfordeling er opfyldt (symmetri, maksimum ved x=0, middelværdi på 0).

I bilaget komme man rundt i forskellige måder at repræsentere normalfordeling på. Den sidste figur kobler til binomialfordeling.

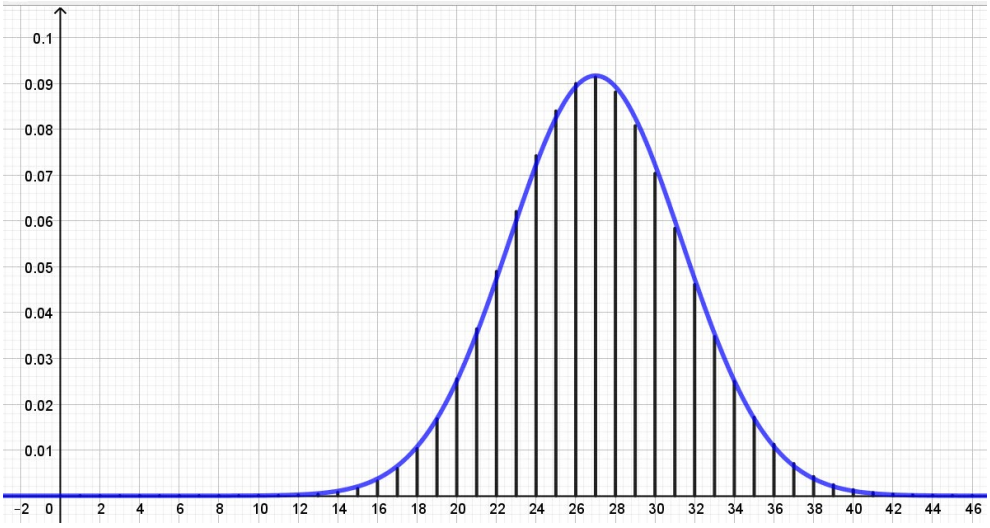
Geogebra-dokumentet giver mulighed for ved brug af skyderne *m* og *s* at illustrere sammenhæng mellem tæthedsfunktion, arealer og fordelingsfunktion. I dokumentet kan der desuden trækkes i punktet *A*.

Bilag - Sandsynlighedsregning

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-30}{5}\right)^2} \qquad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-30}{2}\right)^2}$$



$n = 90$ og $p = 0{,}3$



Spørgsmål 7: Sandsynlighedsregning

Forklar om diskrete og kontinuerte sandsynlighedsfordelinger, herunder binomialfordeling og normalfordeling. Redegør for, hvordan man ud fra to kendte fraktiler kan bestemme middelværdi og spredning for en vilkårlig normalfordeling ved hjælp af standardnormalfordelingen.

Faglig/didaktisk kommentar

Ideen i redegørelsen er at eleven ud fra to fraktiler x_p og x_q (hvor p og q naturligvis også er kendte) argumenterer for følgende to ligninger med μ og σ som ubekendte:

$$\frac{x_p-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p) \text{ og } \frac{x_q-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(q)$$

Derpå løses dette ligningssystem til følgende svar:

$$\mu = \frac{\Phi^{-1}(q)\cdot x_p - \Phi^{-1}(p)\cdot x_q}{\Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}$$

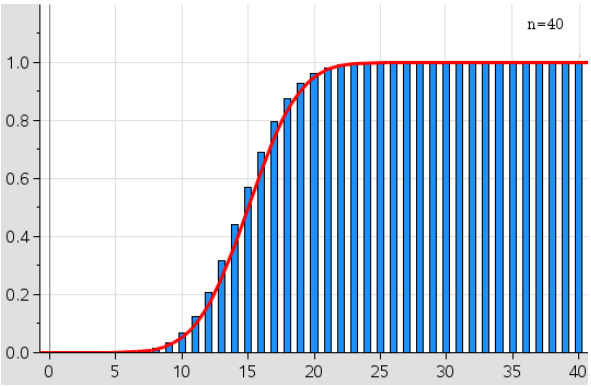
og

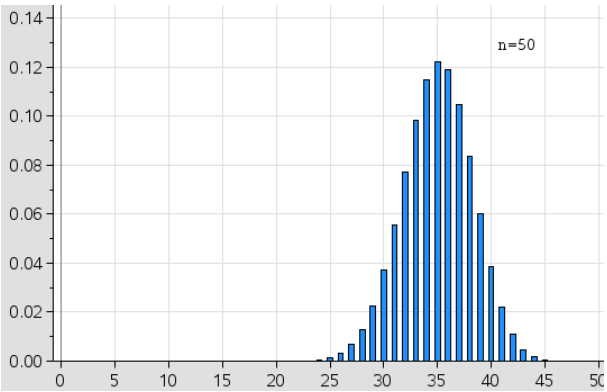
$$\sigma = \frac{x_q - x_p}{\Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}$$

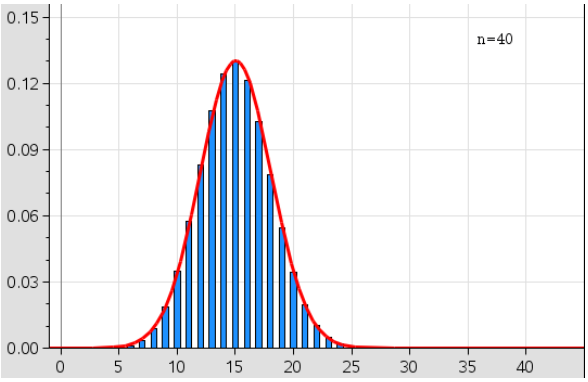
Den svage elev kan vælge at gå til problemstillingen ud fra et konkret eksempel, hvor der regnes med konkrete talværdier.

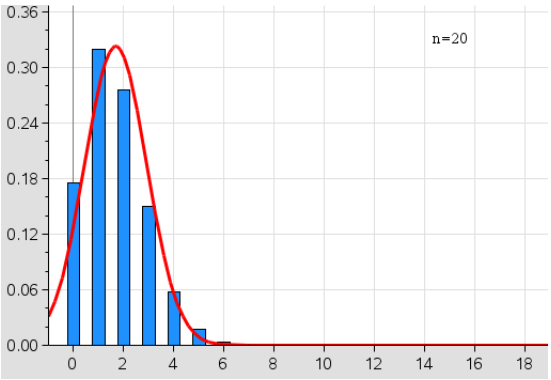
Bilaget giver dels mulighed for ud fra fire grafer at diskutere binomialfordelinger, dels at diskutere sammenhængen mellem binomial- og normalfordeling. Dels mulighed for at diskutere en simulering med CAS-værktøj af slag med to terninger, hvor der skelnes mellem tre måder at forstå et slag med to terninger. Dels øjensum (som i spillet Matador), dels som en kombination af to øjen-antal (som i spillet Backgammon) og dels som slag med to terninger i forskellige farver (som rød og blå terning i spillet Risk). Ud fra simuleringen kan man diskutere om en eller flere af disse fortolkninger giver anledning til et symmetrisk sandsynlighedsfelt, samt om de andres udfald kan beskrives som hændelser i dette og dermed give adgang til beregning af teoretiske sandsynligheder.

Bilag: Sandsynlighedsregning



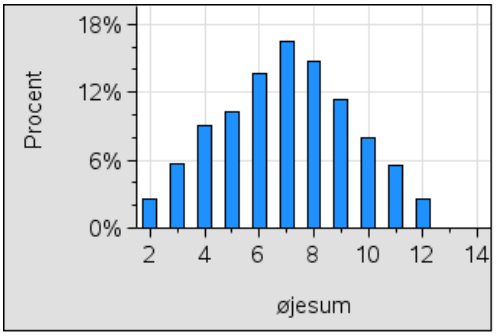


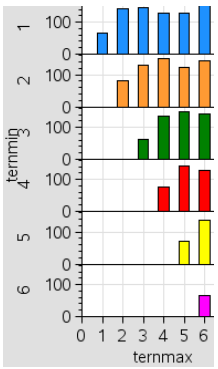


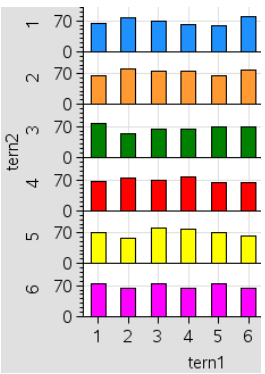


<u>Simulering af slag med to seksiders terninger</u>

	A terning	B tern1	C tern2	D øjesum
=		=randsamp(terning,2500)	=randsamp(terning,2500)	=tern1+tern2
1	1	3	1	4
2	2	2	4	6
3	3	1	6	7
4	4	5	1	6
5	5	6	6	12
6	6	6	4	10
7		5	6	11







Matadorfortolkningen: Øjensum

Back-gammon fortolkningen: Øjenantalskombination

Risk-fortolkningen: Rød og blå terning.

Spørgsmål 8: Normalfordelingen og funktionsundersøgelse

Forklar tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X. Redegør for differentiation af en tæthedsfunktion for en normalfordelt stokastisk variabel X, og betydningen af vendepunkter for grafen hørende til tæthedsfunktionen.

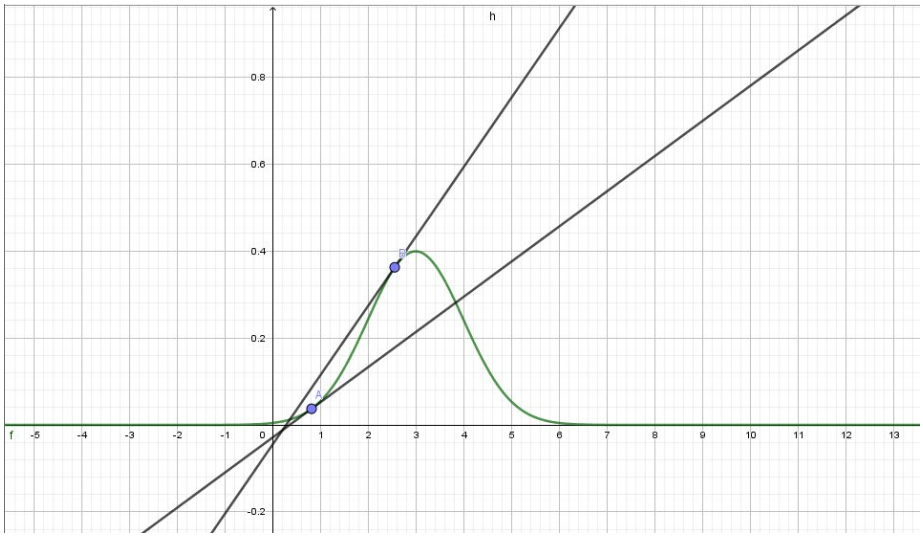
Den omtalte figur i bilaget ligger aktivt som geogebra-fil i
Bilag 8 - Normalfordelingen og funtionsundersøgelse.gbb.

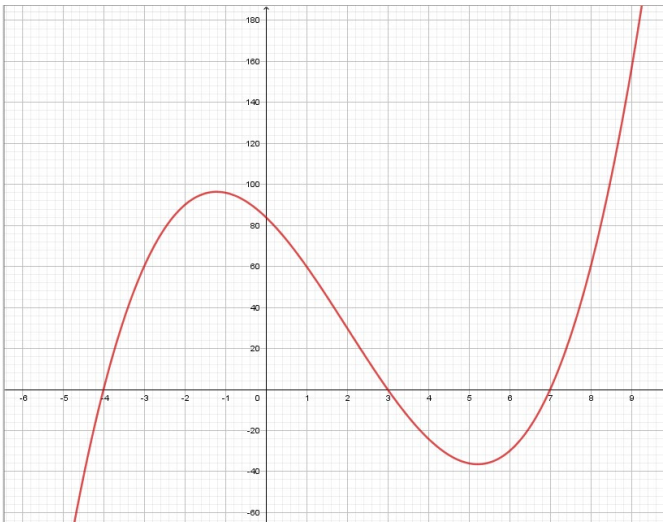
Faglig/didaktisk kommentar

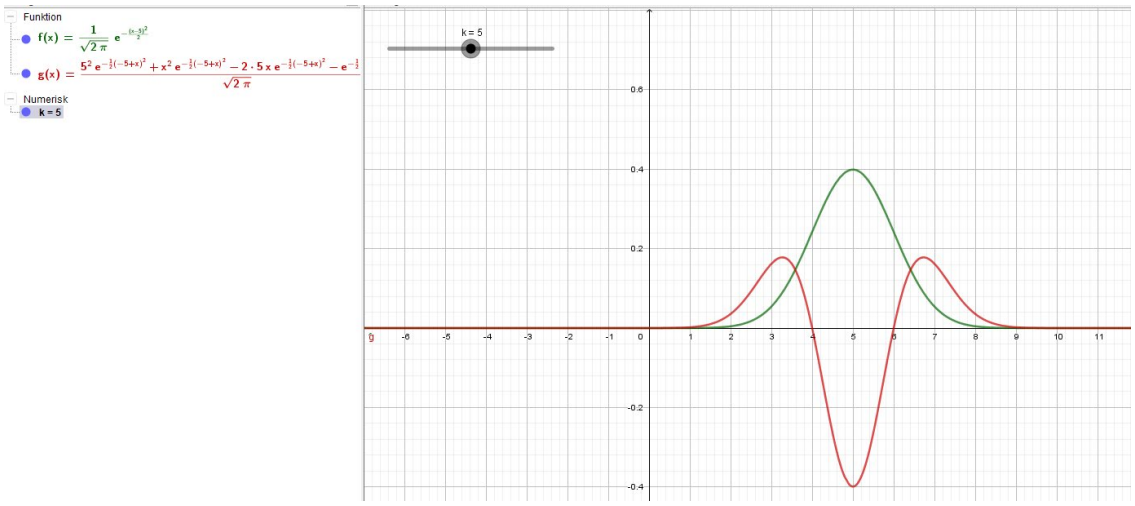
Eleven forventes under forklaringen at komme ind på tæthedsfunktionen for en standard normalfordelt stokastisk variabel X vha. de forskellige repræsentationsformer. Herunder graf og ligning for vandret forskydning med en konstant k, areal under grafen, skalering med en konstant s.

Eleven forventes under redegørelsen at komme ind sammensat differentiation herunder $f(g(x))$, hvor $f(x) = \mathrm{e}^x$ og $g(x) = (x-k)^2$, og ad denne vej løfte sit ræsonnement om normalfordelingen. I den interaktive del af bilaget indgår der en parameter for middelværdien. Eleven kan selv vælge at inddrage en parameter mere for spredningen.

Bilag - Normalfordelingen og funktionsundersøgelse







Spørgsmål 9: Repræsentationsformer

Forklar, hvordan retningen for gennemløbet af en banekurve for en vektorfunktion kan afgøres i hver af de tre repræsentationsformer tabel, graf og formel, specielt med henblik på gennemløb af dobbeltpunkter.
Gør rede for, omskrivninger mellem formelrepræsentationen for en cirkulær banekurve og ligningen for en cirkel, og gør rede for, hvordan man i hver af disse repræsentationer afgør om en linje er tangent til banekurven/cirklen.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven forventes at præsentere velvalgte eksempler på vektorfunktioner beskrevet ved forskrift, tabel og banekurve med særligt fokus på den uafhængige variabel t.

Formelrepræsentationen af en cirkulær banekurve henholdsvis ligningen for en cirkel og sammenhængen mellem de forskellige repræsentationer af koordinater til punkter på banekurve/cirkel forventes forklaret i forbindelse med de algebraiske omskrivninger.

Den indbyrdes placering af banekurve/cirkel og linje kan inddrage forskellige repræsentationer af linjer (eventuelt omskrivninger mellem disse), som er særligt velegnede i bestemte situationer – fx for banekurven undersøges parallelitet mellem hastighedsvektor (herunder retningens betydning) og linje, og i den geometriske repræsentation anvendes fx afstand fra punkt (centrum) til linje (formlen kan evt. udledes).

Dialogen med inddragelse af bilag omtales de fire repræsentationsformer, som de kommer til udtryk i forskellige matematiske emner:

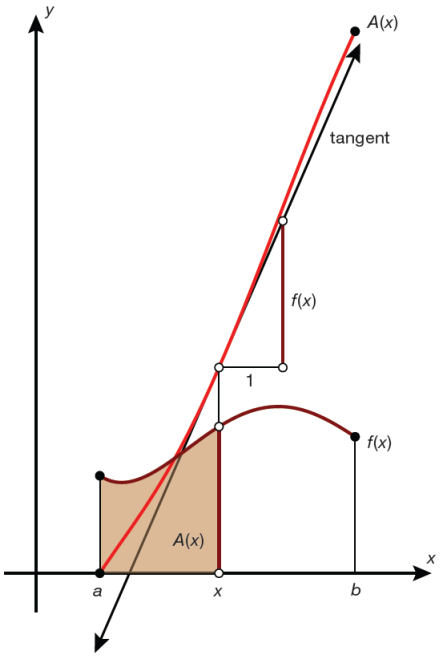
> Den harmoniske svingning giver god mulighed for oversættelse *fra formel til graf*.
> Den logistiske vækst beskrives og der kan oversættes *fra sprog til formel*.
> Den grafiske repræsentation af arealfunktionen giver mulighed for oversættelse *fra graf til formel*.
> Sandsynlighedstabel og simulering giver mulighed for oversættelse af tabel til formel – og for at tale om a priori sandsynligheder (*'formel'*) versus frekvenser (*'tabel'*).

Bilag - Repræsentationsformer

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$$

Praxis: Oversættelse fra sprog til symboler ved opstilling af differentialligninger

1. De variable og andre størrelser, der indgår, navngives.
2. *Den hastighed, hvormed* (variablen *y*) ændres, oversættes til *y'*.
3. *Er proportional med* oversættes til at gange med en konstant *k*.
4. *Forskellen mellem* (to udtryk) oversættes til en differens mellem de to udtryk.



	A terningesum	B sansynlighed	C ss_dec	D simulering_ss	E terning1	F terning2	G simuleretsum	H
=							=randsamp(terning1,1000)+	
1	2	1/36	0.028	0.028	1	1	8	
2	3	1/18	0.056	0.057	2	2	6	
3	4	1/12	0.083	0.086	3	3	6	
4	5	1/9	0.111	0.116	4		11	
5	6	5/36	0.139	0.131	5		6	
6	7	1/6	0.167	0.163	6		10	
7	8	5/36	0.139	0.147			4	
8	9	1/9	0.111	0.109			8	
9	10	1/12	0.083	0.077			12	
10	11	1/18	0.056	0.056			6	
11	12	1/36	0.028	0.03			9	

G simuleretsum:=randsamp(terning1,1000)+randsamp(terning2,1000)

Spørgsmål 10: Funktioner og vektorer

Forklar, hvordan vektorer anvendes til at fremstille parameterkurver i planen.

Redegør for hvordan banekurven for en vektorfunktion $\vec{r}(t)$ tegnes i hånden, herunder særligt for multiple punkter samt situationer hvor $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven får en lejlighed til at tale om vektorer og parameterkurver som grafisk repræsentation af vektorfunktioner. Dermed har spørgsmålet et bredt fokus på vektorbegrebet.

I den redegørende del skal eleven gennemgå de ræsonnementer, der ligger bag at tegne en banekurve uden et elektronisk værktøj. Herunder overvejelser om skæringer med akserne og punkter med vandret eller lodret tangent samt gennemløbsretningen.

Særligt er der sat fokus på to lidt mere krævende ræsonnementer, nemlig undersøgelsen af om funktionen har et multipelt punkt (f.eks. et dobbeltpunkt), og hvad der sker, hvis der findes enkeltstående t-værdier, for hvilke $\vec{r}'(t)$ bliver nulvektoren.

Det er oplagt at man i undervisningen anbefaler eleven at have konkrete eksempler ved hånden (og selv har nogle i baghånden, hvis eleven ikke har). Det kan f.eks. være $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$ og $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$ (hvor $\vec{s}'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

I tabelrepræsentationen forventes eleven at argumentere for grafens forløb ud fra værdierne.

I den første grafiske repræsentation kan man spørge til parameterfremstilling for cirklen, om hvordan man kan argumentere for den positive omløb af cirklen, osv. Man kan derefter tale om grafforskydninger og hvordan man kommer frem til parameterfremstillingen af den forskudte cirkel. Enhedscirkel kan desuden berøres.

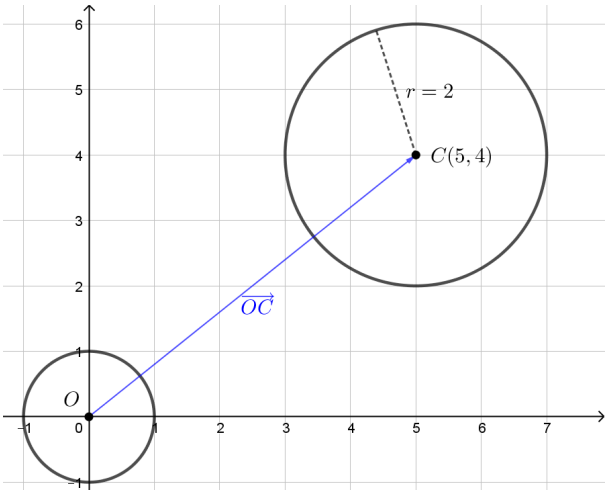
I den anden grafiske repræsentation kan man tale om hvordan man afgør banekurvens retning, samt tangenter og vinkel mellem tangenter i dobbeltpunkter.

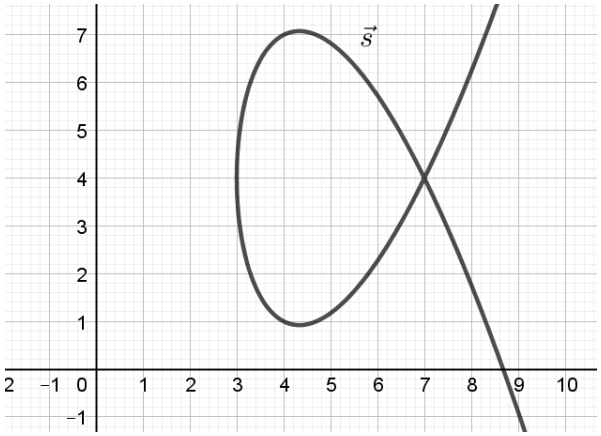
Formelrepræsentationerne kan danne udgangspunkt for en dialog om forskel på vektorfunktion og funktion af en variabel; omskrivning fra vektorfunktion til funktion af en variabel og omvendt.

Bilag - Funktioner og vektorer

Tabellen er knyttet til banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}$.

t	-2	-1,5	-1	0	1	1,5
$x(t)$	6	4	3	2	3	4
$y(t)$	-3	1	2	1	0	1
$x'(t)$	-4	-3	-2	0	2	3
$y'(t)$	10	4	0	-2	0	4





$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t-2 \\ t^2+3t-4 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2 + 7x + 6$$

Spørgsmål 11: Vektorfunktioner

Forklar differentialkvotienten af en vektorfunktion. Redegør for geometriske egenskaber ved differentiation af hastighedsfunktionen ud fra en opsplitning i længde og retning herunder differentiation af et prikprodukt af vektorfunktioner.

Figuren, der omtales i bilaget, er vedhæftet PDF-filen som aktivt Geogebra-fil under navnet Bilag 11 – Vektorfunktioner.ggb.

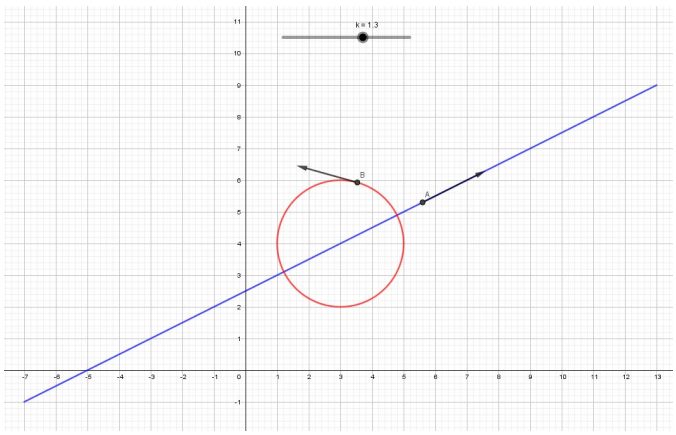
Faglig/didaktisk kommentar

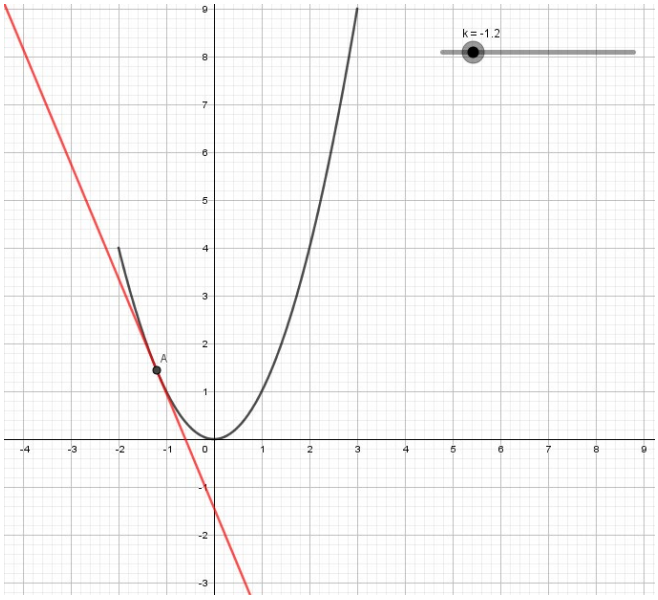
Eleven forventes under forklaringen at inddrage opsplitningen i koordinatfunktioner, tangentvektor, tangent til en banekurve beskrevet ved en parameterfremstilling henholdsvis en ligning.

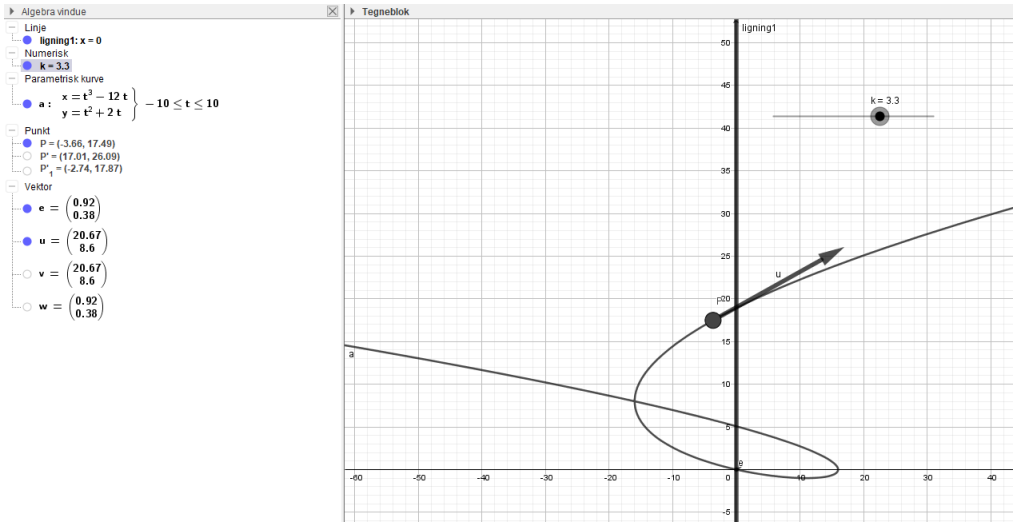
Eleven forventes under redegørelsen at komme ind $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}(t)$ og differentiation af denne ud fra differentiation af produkt. Ud fra denne skal eleven argumentere for bevægelsen herunder udnytte $1 = \vec{e}(t) \cdot \vec{e}(t)$ og dermed omtale krumning af en banekurve.

Ideen er, at eleven inddrager sin viden om differentialregning på vektorfunktioner, og ad denne vej løfter sin ræsonnementer om gennemløbet af banekurver for vektorfunktioner.

Bilag - Vektorfunktioner







Spørgsmål 12: Funktioner af to variable og optimering

Forklar hvad man forstår ved en funktion af to variable. Redegør for, hvordan man benytter funktioner af to variable til at finde den bedste rette linje, der beskriver en lineær sammenhæng mellem to variable i et datasæt.

Faglig/didaktisk kommentar

Spørgsmålet inviterer eleven til at præsentere begrebet funktion af to variable og elementære egenskaber ved den. Under redegørelsesdelen kan eleven tage udgangspunkt i datasæt med n punkter, forklare om residualer og opstille funktionen

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \,,$$

hvor $r_i = y_i - a \cdot x_i - b$. Den dygtige elev vil kunne godt benytte summationssymbolet og redegøre for hvordan man bestemmer koefficienterne i den lineær model. Således, at

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)^2$$

Ved at benytte reglen for differentiation af sammensatte funktioner, fås

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i - a \cdot x_i - b) \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)$$

Da man skal finde den mindste kvadratsum, betyder det, at både $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ og $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Dette svarer til et ligningssystem med to ligninger og to ubekendte (a og b). Hvis eleven tager udgangspunkt i datasæt med to eller tre punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) bliver symbolmanipulationen ikke så tung, men det centrale ræsonnement i spørgsmålet mistes ikke. Den svage elev vil kunne vælge en empirisk tilgang, dvs. med et taleksempel på datasæt med tre punkter.

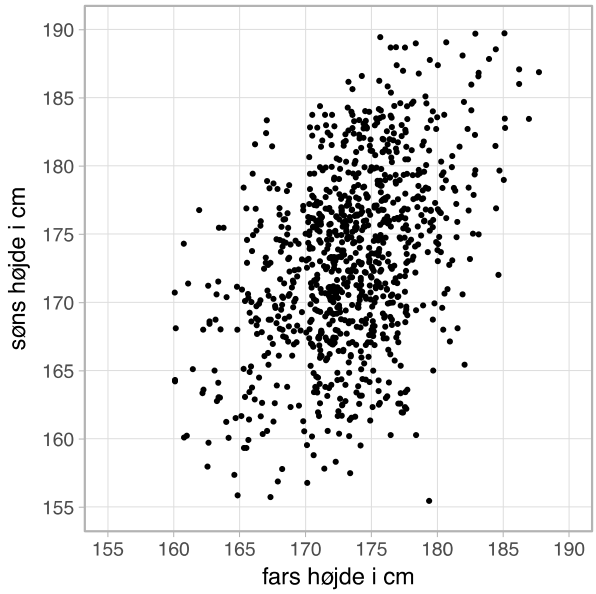
Den første del af bilaget inviterer til en diskussion af hvordan variable tænkes ind, om man behandler variable i forbindelse med funktioner af to variable eller i forbindelse med sammenhæng mellem to variable. Diskussionen kan også tage udgangspunkt i punktplottet og bede eleven om at forklare om hvordan man konstruerer den bedste rette linje med mindst tre punkter. Man kan med fordel vælge et andet datasæt som er tonet til elevens studieretning.

Den anden del af bilaget omhandler grafiske repræsentationer af funktioner af to variable, hvor man kan inddrage relevante begreber som fx ekstrema, niveaukurver, snitkurver. Det er oplagt at bede eleven forholde sig til de to figurer og forklare, at niveaukurverne til højre ikke tilhører grafen til venstre.

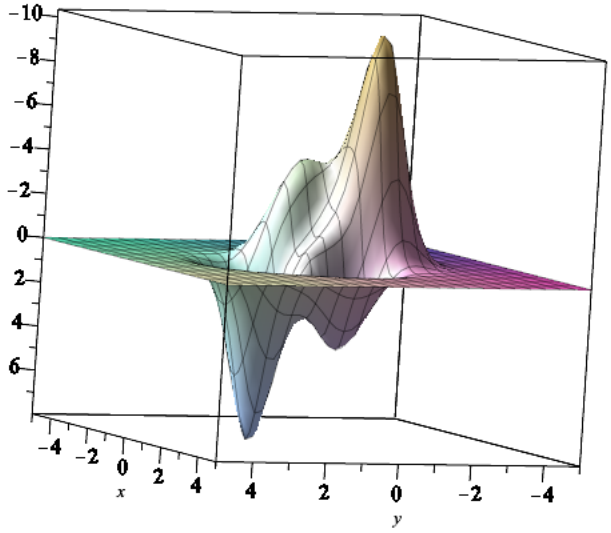
Bilag - Funktioner af to variable og optimering

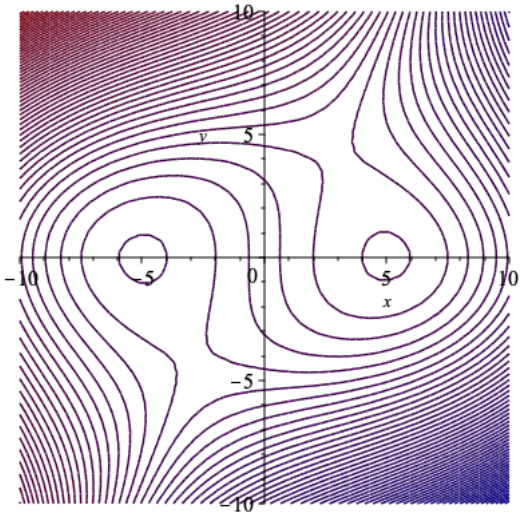
Et datasæt indeholder sammenhørende målinger af fædres højder og deres førstefødte sønners højder som voksne. Der er målinger for i alt 952 par af fædre og sønner. De første 10 målinger (angivet i cm) ses i tabellen til venstre.

fars højde	sønnens højde
186,9	183,4
184,6	172,0
185,0	179,0
182,1	165,4
179,4	155,4
178,4	160,3
179,7	165,0
179,7	168,7
176,5	160,3
173,4	157,5



$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$$





Spørgsmål 13: Funktioner af én og to variable

Forklar om partielle afledede for funktioner i to variable som en analogi til differentialregning i én variabel, herunder hvor der optræder forskelle. Redegør for beskrivelsen af stationære punkter for en funktion i én og to variable.

Faglig/didaktisk kommentar

Eleven forventes at tage udgangspunkt i en grafisk repræsentation. De partielle afledede er blevet introduceret ved at holde den ene variabel fast og opskrive udtrykket for sekanthældninger i den anden variabel. Geometrisk beskrivelse gives i form af passende snit i fladen, der beskrives af f. I én dimension medfører differentiabilitet i et punkt, at funktionen er kontinuert. Det kan eleven redegøre for med tre-trins metoden. I to dimensioner er konklusionen ikke nødvendigvis korrekt: det sidste eksempel i bilaget demonstrerer, at de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i alle punker $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ men f er ikke kontinuert i (0,0).

I én dimension ville undersøgelsen af mulige stationære punkter for funktionen indebære at løse ligningen $f'(x) = 0$ og f.eks. anvende f'' til at karakterisere det stationære punkt. Heri er der gode ræsonnementer. Endvidere er der i bilaget lagt op til at diskutere et eksempel på monotoniundersøgelse af en funktion i én variabel, som ikke er differentiabel overtalt.

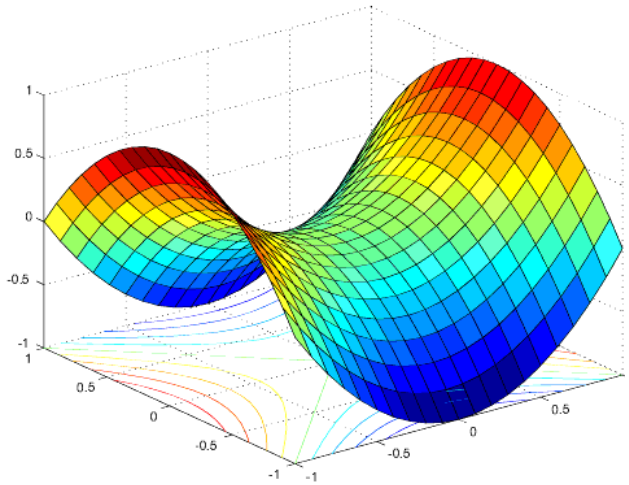
Karakteriseringen af stationære punkter for funktioner i to variable omtaler Hesse-matricen som erstatning for f'', uden naturligvis at gå i detaljer med dette. Dette tænkes illustreret grafisk, med vægt på den geometriske betydning. Den første figur i bilaget skal understrege at det ikke er tilstrækkeligt at se på de to partielle afledede af funktionen for sig, dvs. man kan ikke reducere alt til noget velkendt i én dimension.

Pointen med den valgte funktioner, at de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i alle punker (x, y) men at f ikke er kontinuert i (0,0).

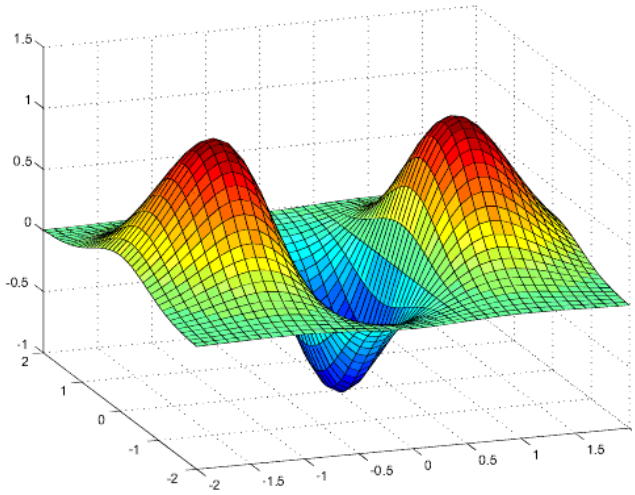
Bilag - Funktioner af én og to variable

x		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$
$f(x)$		1		0	

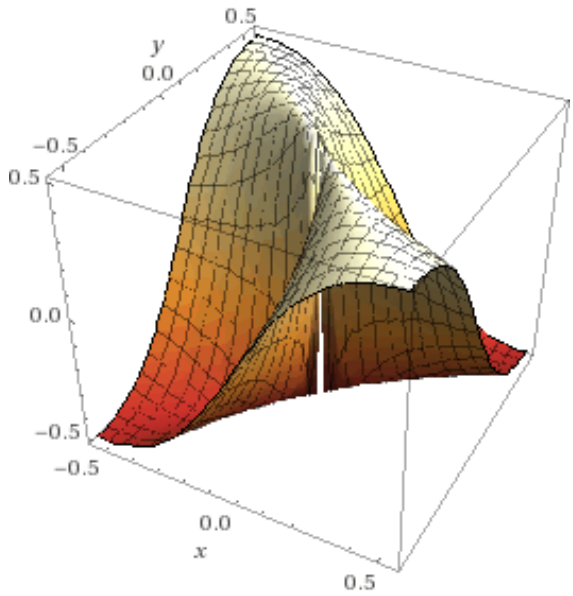
$f(x,y) = x^2 - y^2$



$f(x,y) = (4x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$



$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Spørgsmål 14: Funktioner af to variable

Forklar begreberne gradienter og niveaukurver herunder retningsafledede ud fra snitfunktioner hørende til en funktion af to variable. Redegør for egenskaber ved gradienter herunder retningen og sammenhæng med niveaukurver.

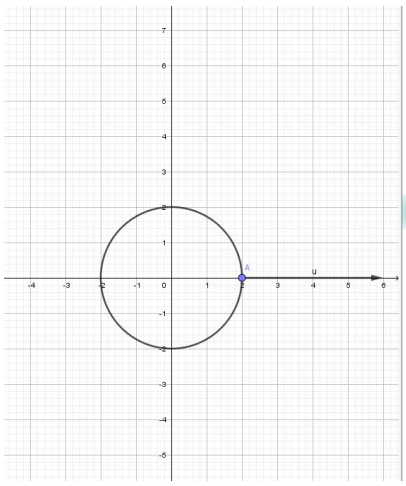
Den sidste del af bilaget ligger i den aktive Geogebra-fil
Bilag 14 – Funktioner af to variable.ggb som er vedhæftet PDF-filen.

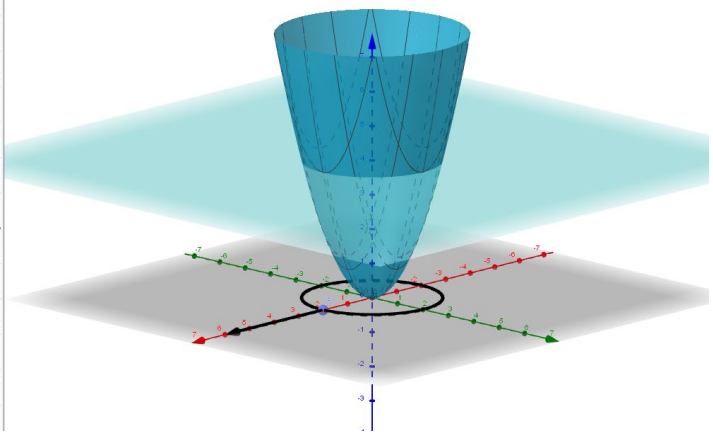
Faglig/didaktisk kommentar

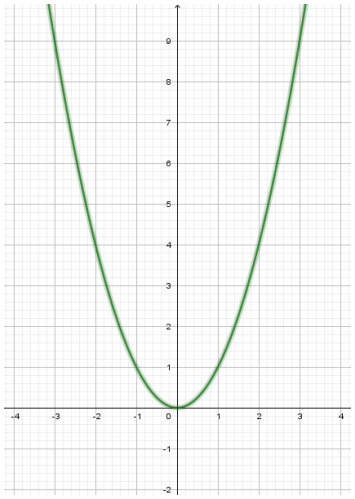
Eleven forventes under forklaringen at komme ind på snitfunktioner i forhold til en snitplan ud fra en parameterfremstilling i *xy*-planen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$og deres afledede. På denne måde kan eleven opbygge en progression fra den analytiske plangeometri til funktioner af to variable.

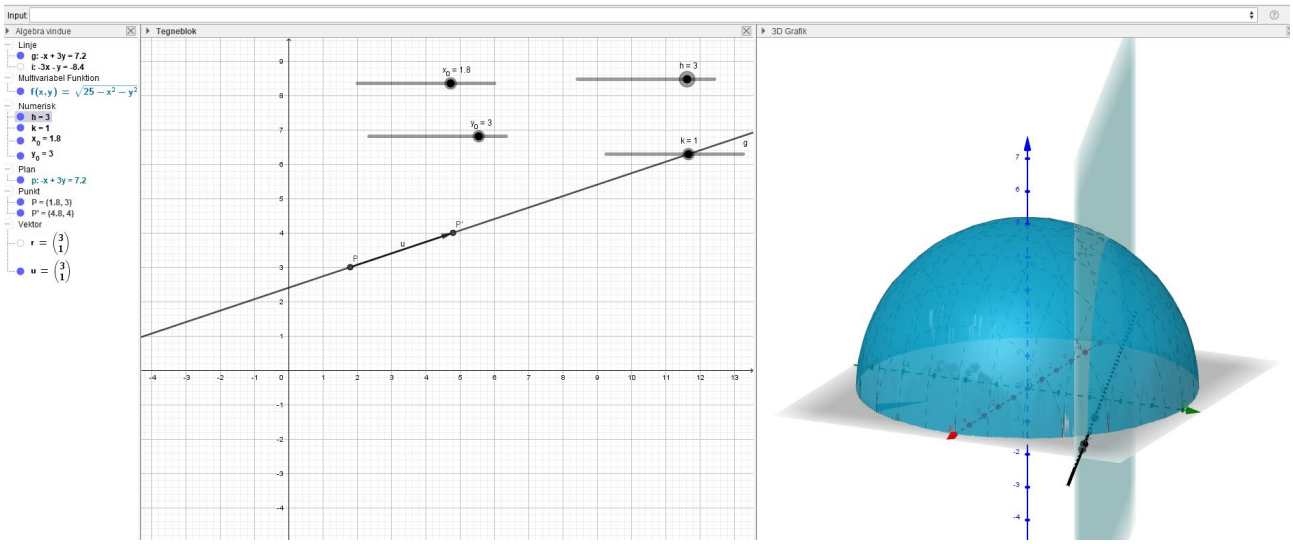
Derefter forventes eleven under redegørelsen at komme ind på sætningen: *Gradienten angiver retningen med størst stigning eller størst fald* og sætningen: *Gradienterne står vinkelret på niveaukurverne*.

Bilag - Funktioner af to variable









Spørgsmål 15: Funktioner og differentialregning

Forklar om funktioner af én variabel, to variable og vektorfunktioner, med henblik på definitions- og værdimængde, grafisk fremstilling og bestemmelse af stationære punkter. Redegør for tangentbegrebet i én og to dimensioner med inddragelse af "lokal linearitet".

Faglig/didaktisk kommentar

Spørgsmålets hovedfokus ligger i at eleven kan præsentere en forståelse af begrebet *funktion*, med nedslag i de tre typer af (kontinuerte) funktioner fra kernestoffet. Her kan de ræsonnementer der knytter sig til forståelsen blive særligt tydelige, fordi fokus ligger på sammenligningen.

Spørgsmålet har i kompetencetermer særligt vægt på tankegangs- og repræsentationskompetence.

Redegørelsen for tangentlinje og –plan rummer mulighed for en udledning på højeste taksonomiske niveau, samt en sammenlignende samtale om differentiabilitet som "lokal linearitet" i såvel en- som to dimensioner.

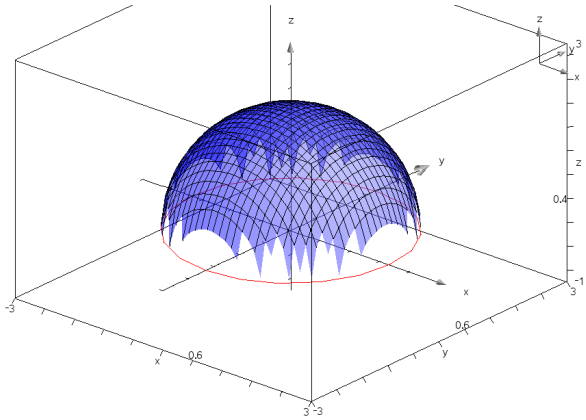
Bilaget giver for det første mulighed for at tale om diskrete funktioner, herunder om globalt og lokalt ekstremum for sådanne funktioner. Dels giver det mulighed for at eksemplificere nogle af begreberne fra omtalen af de tre typer af kontinuerte funktioner, i fire eksempler givet ved forskrift og (udsnit af) graf. I de to funktioner af to variable er det muligt at tale om dels begrænset definitionsmængde, dels muligheden af uendeligt mange stationære punkter på endeligt meget plads. For de to øvrige grafer kan diskuteres $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og de tre arter af stationære punkter for en funktion af én variabel.

Bilag - Funktioner og differentialregning

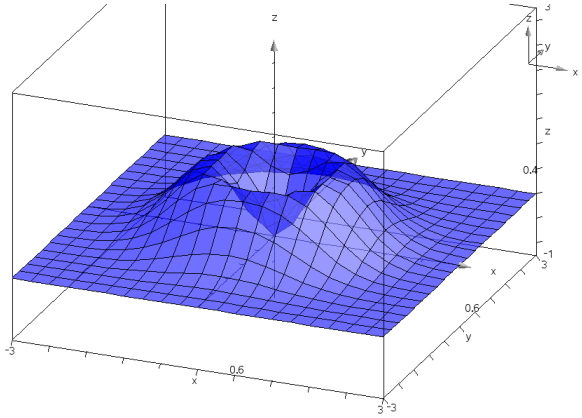
$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

$$A_n = b \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

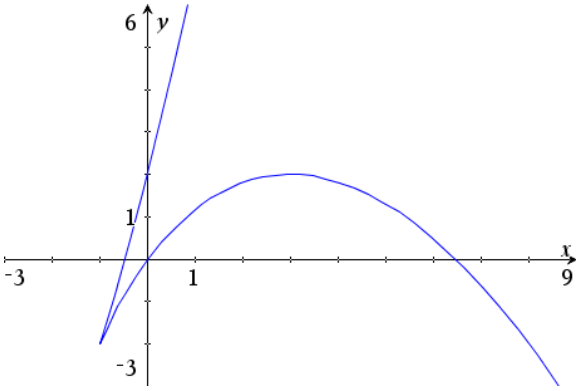
$$f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$



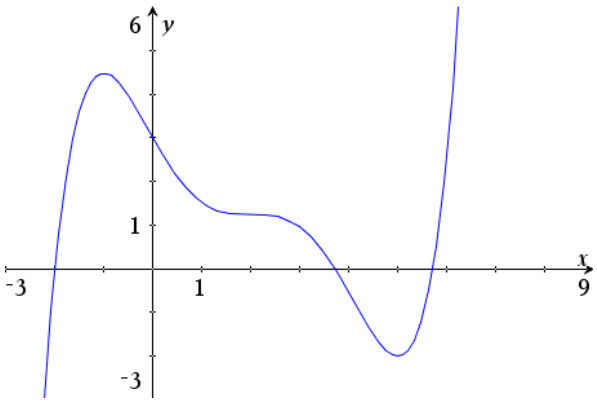
$$f(x, y) = 3 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$$



$$f(x) = \frac{x^5}{50} - \frac{x^4}{5} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{5} - 2x + 3$$



Spørgsmål 16: Matematisk modellering

Forklar om modellering af populationer, herunder eksponentiel og forskudt eksponentiel vækst.
Gør rede for egenskaber ved logistisk vækst, med inddragelse af (y, y')-plot og hældningsfelt.
Vurdér anvendeligheden af de forskellige modeller til beskrivelse af populationer.

Faglig/didaktisk kommentar
Matematisk modellering er en meget bred kompetence, der handler om at matematisere forhold i virkeligheden til matematik, arbejde med denne matematik og fortolke resultatet af dette arbejde tilbage i virkeligheden. Derudover skal man kunne forholde sig kritisk til matematiseringen og vurdere det rimelige i den opnåede fortolkning, herunder have bud på evaluering af denne.

Besvarelsen af spørgsmålet her, skal på den ene side teste dækningsgraden af kompetencen hos eleven (dvs. at eleven kan komme bredt omkring hele kompetencen som beskrevet ovenfor), og på den anden side også teste de mere snævre sider af det matematiske ræsonnement.

I redegørelsen for den logistiske vækst er der således mulighed ud fra eksempelvis et (y, y')-plot at argumentere for eksistens af ligevægtsløsninger, herunder om disse er stabile eller ustabile. Og ud fra et hældningsfelt vise disse udviklinger. I arbejdet med (y, y')-plot har eleven samtidig mulighed for at inddrage sit kendskab til andengradspolynomiet.

Det er også en mulighed for at inddrage et klassisk bevis for løsningen af den logistiske differentialligning, men spørgsmålet lægger ikke op til, at dette er en forudsætning for en toppræstation.

I forklaring kan der indgå begreber som fødsels- og dødsrate, samt hvordan disse indgår i en eksponentiel model, samt sammenhængen mellem den eksponentielle og den logistiske model. Det er også mulig at diskutere om forskudt logistisk vækst er et bedre svar på begrænsning i en populations vækst, end den logistiske vækst. I modelkritikken kan indgå manglende udvekslinger mellem en lokal population og den øvrige globale population (”ind- og udvandring”), samt overvejelser over om dette kan medtænkes i modellen.

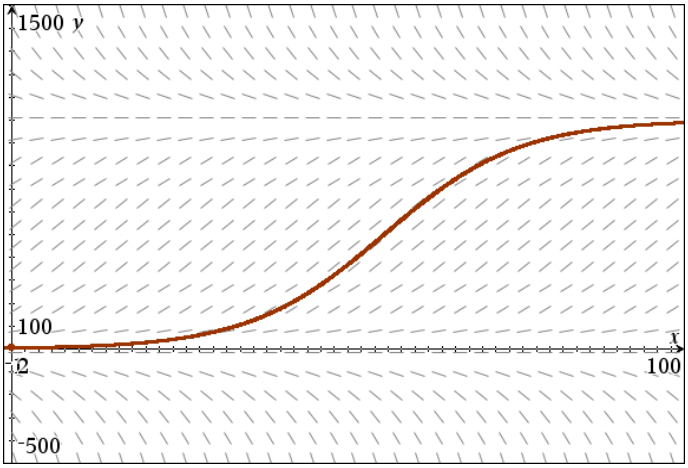
Bilaget giver mulighed for at diskutere modelleringsaspekter i tre sammenhænge. En simpel *teoribaseret* logistisk model for rygtespredning, som er nem at gå til. En *databaseret* model for befolkningsvæksten i Indien. En rent teoretisk indledning til modelleringen af befolkningstallet i et vilkårligt land, hvor fokus især er på de antagelser modellen baserer sig på. De tre tilfælde giver til sammen mulighed for en bred faglig samtale om modelleringsbegrebet.

Bilag - Modelleringskompetence

Lad $N(t)$ være antallet af elever på en skole der kender til et rygte til tidspunktet t:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}0001 \cdot N \cdot (1000 - N)$$

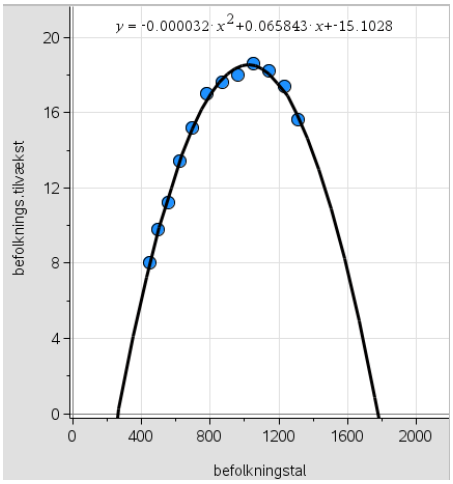
$$N(0) = 4$$

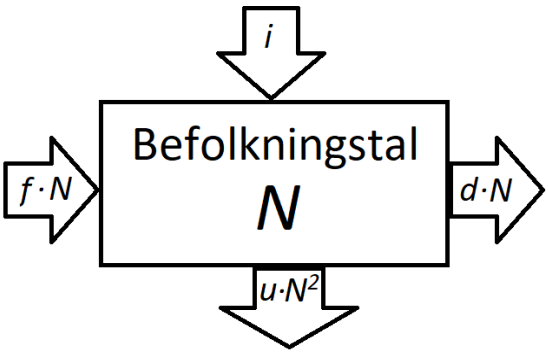


Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af befolkningstallet og befolkningstilvæksten i Indien i en periode fra 1960 og frem.

Befolkningstal (mio.)	449	498	554	621	697	782
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	8	9,8	11,2	13,4	15,2	17

Befolkningstal (mio.)	870	960	1053	1144	1231	1309
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	17,6	18,0	18,6	18,2	17,4	15,6





Spørgsmål 17: Matematisk problembehandling

Forklar om løsning af optimeringsproblemer af såvel én som to variable. Redegør for hvordan man bestemmer bredde og højde af et parabelsegment med areal på 100, så omkredsen af parabelsegmentet bliver mindst mulig.

Faglig/didaktisk kommentar

Problembehandlingskompetence handler om at kunne *opstille* og *løse* matematiske problemer. Til dette hører at kunne opdele behandlingen i nødvendige trin og operationalisere hvert af disse trin, herunder at vælge det værktøj (hjælpemiddelkompetence), der kan løse opgaven. I dette eksempel kan det ikke klares alene ved tavle-og-kridt – et CAS-værktøj er nødvendigt til dele af processen.

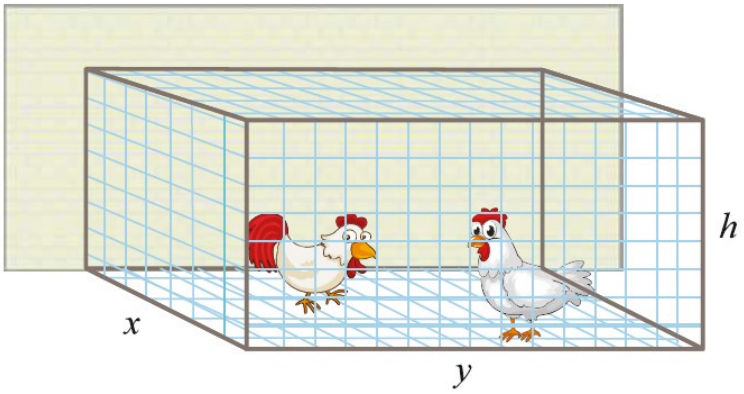
Problembehandlingen i denne opgave består i en række trin:

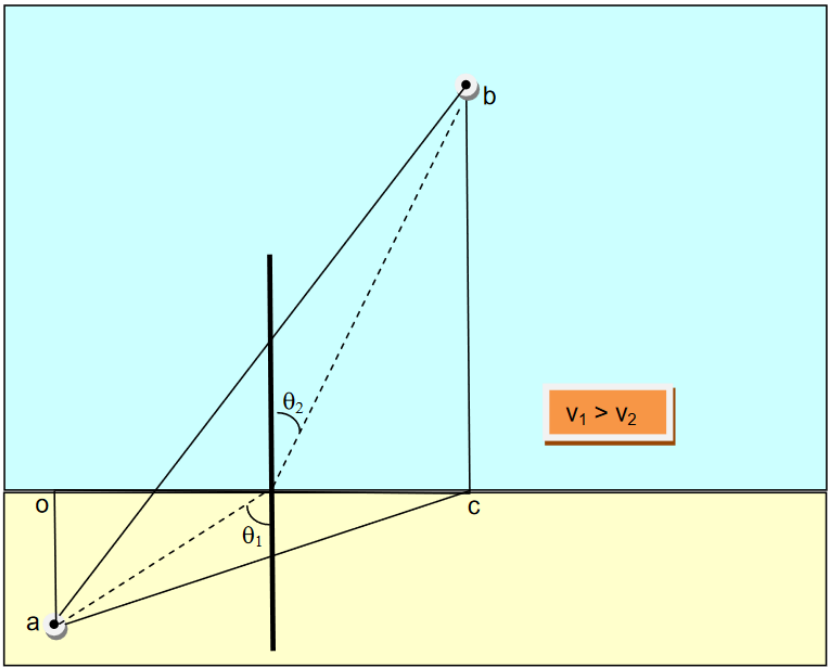
- Find en forskrift for den parabel, som beskriver den krumme del af parabelsegmentet. Her kan f.eks. vælges punkterne $(0,0)$, $(b,0)$ og $\left(\frac{b}{2},h\right)$, som giver anledning til forskriften $f(x) = -\frac{4h}{b^2}\cdot x\cdot(x-b)$
- Arealet kan da bestemmes ved integration som $A(h,b) = \frac{2}{3}\cdot h\cdot b$
- Omkredsen kan udtrykkes ved: $O(h,b) = \int_0^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx + b$.
- Herefter kan $A(h,b) = 100$ løses for h og udtrykket indsættes i $O(h,b)$ som da bliver til en ren funktion af b, $O(b)$. Derpå kan et stationært punkt findes ved at løse $O'(b) = 0$ og det kan eftervises at dette er et minimum. Herefter kan den tilhørende højde h bestemmes.
- Forskriften for O lader sig dog dårligt bestemme i hånden. Det er altså her helt nødvendigt at eleven bringer et CAS-værktøj i spil. Svaret bliver $b = 13{,}024$ og $h = 11{,}517$.

Problemet skal være løst i forbindelse med undervisningen, f.eks. i et projekt om problembehandlingskompetence. Eleven kan vælge at lave beregningerne på computer som en del af sin fremlæggelse, eller blot henvise til resultater der tidligere er opnået.

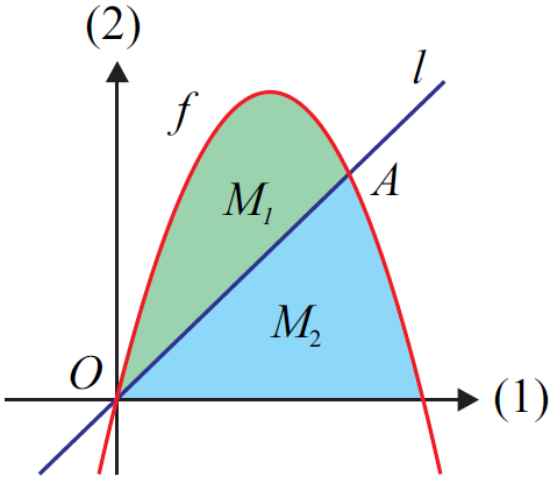
På bilaget arbejdes dels videre med to optimeringsproblemer, dels et simpelt i to variable (med rum for at eleven selv kan formulere problemet) og dels det klassiske livredderproblem. Derudover er der to geometriske problemer, dels mulighed for at bestemme x, så to punktmængder er eksempelvist lige store, dels det geometriske problem, hvor højt man skal skænke i et snapseglas med form som en "omvendt kegle", for at glasset er halvt fuldt. Alle fire problemer bør naturligvis have været behandlet i undervisningen, f.eks. i et projekt om matematisk problemløsning.

Bilag - Matematisk problembehandling





$$f(x) = -x^2 + 6x$$



Spørgsmål 18: Ræsonnementskompetence

Forklar om ræsonnementer, herunder forskellige måder at argumentere for matematisk viden.

Redegør for hvordan formlen for annuitetsopsparing $a_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan udledes ved såvel et direkte ræsonnement som ved et induktions-ræsonnement.

Faglig/didaktisk kommentar

Spørgsmålet giver mulighed for at eleven kan fortælle om forskellige principielle overvejelser i forhold til det matematisk ræsonnement. Det kan f.eks. være forskellige bevistyper som direkte bevis, bevis ved modstrid, bevis ved kontraposition, bevis ved modeksempel, induktionsbevis, mv.

Men det kan også være nogle mere løsrevne sider af matematisk logik. F.eks. forholdet mellem udsagnet "hvis A så B" og så udsagn som "hvis B så A" og "hvis ikke-B så ikke-A". Også betydningen af "A" og "ikke-A" kan diskuteres.

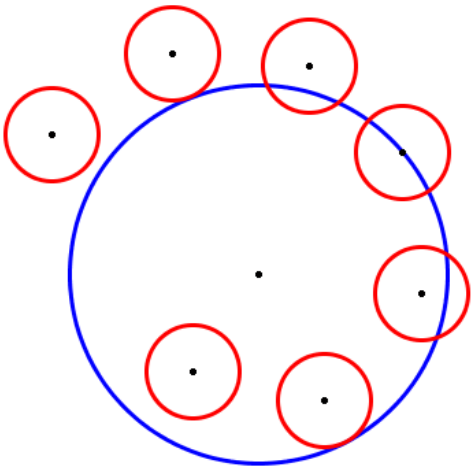
Eleven kan med fordel inddrage små selvvalgte eksempler på de forskellige typer af slutninger.

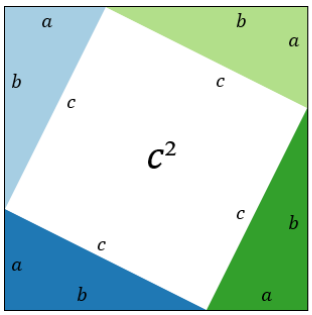
Redegørelsen tager afsæt i en formel der er supplerende stof, men det er ikke så afgørende fordi kernen i spørgsmålet ikke er formlen som sådan, men ræsonnementet bag den.

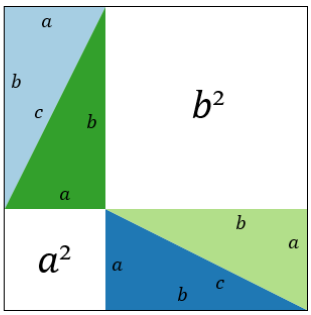
Bilaget giver eleven mulighed for at gennemføre en række små forskellige ræsonnementer, som naturligvis alle bør være behandlet i undervisningen:

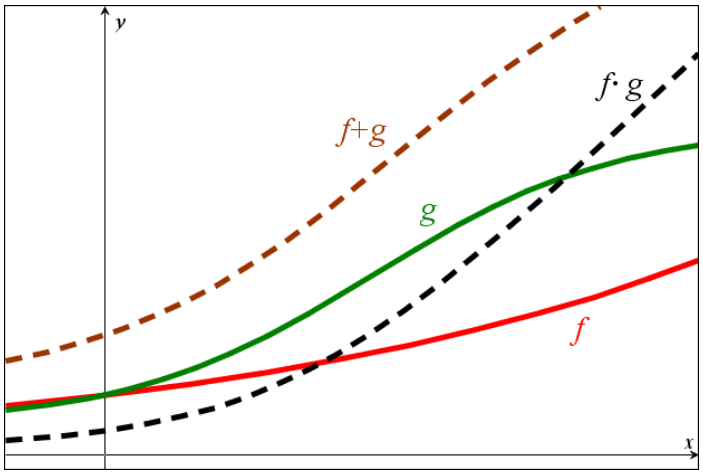
1) Hvis f og g er voksende, gælder det så altid at $f + g$ og $f \cdot g$ også er voksende. Det første kan vises ved at se, at hvis $f' > 0$ og $g' > 0$, så er $f' + g' > 0$. Det andet kan modbevises f.eks. ved at gange to voksende lineære funktioner sammen.
2) Formulere sammenhæng mellem radier (r_1 og r_2) i to cirkler, afstand (d) mellem cirklernes centre og antal skæringspunkter mellem cirklerne.
3) Pascals trekant giver mulighed for forskellige ræsonnementer. Den røde trekant leder tankerne han på ideen om, at et element i figuren kan konstrueres som summen af to elementer oven over. Ud fra dette kan eleven lave trekanten med tal. Sammenhæng kan formuleres symbolsk som $K(n,r) + K(n,r+1) = K(n+1,r+1)$, og herefter vises ved et ræsonnement.
4) Den sidste figur giver mulighed for at tale om det mere formelle ræsonnement vi kalder "et bevis", idet der lægges op til at bevise Pythagoras sætning. Det er muligt at dykke ned i den følge af små sætninger der må vises, for at beviset bliver fuldstændigt. Således kan man også få en snak om betydningen af *aksiomer*.

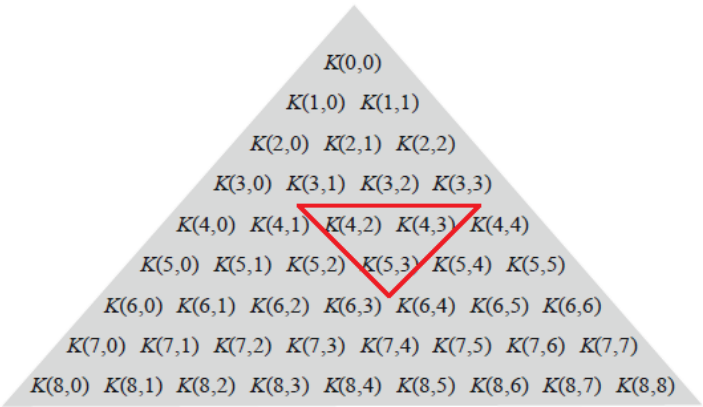
Bilag - Ræsonnementskompetence











Spørgsmål 19: Matematikkens videnskabsteori

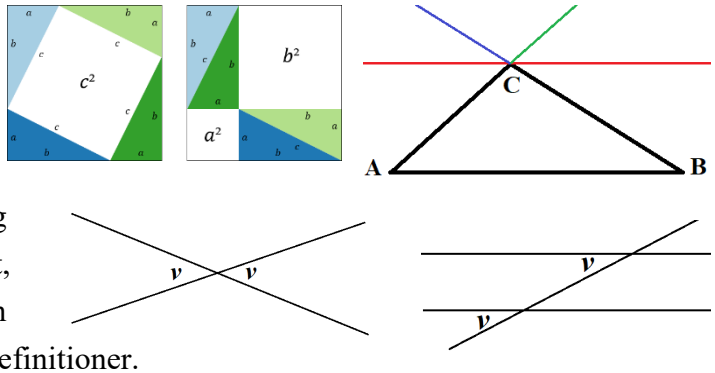
Forklar om matematikkens videnskabsteori, med fokus på matematiks karakteristika som fag, herunder deduktive og induktive metoder. Redegør for aksiomatisk-deduktive metoder, med afsæt i et bevis for Pythagoras sætning, der inddrager Euklids fem aksiomer for den klassiske geometri.

Faglig/didaktisk kommentar:
Spørgsmålet tager udgangspunkt i læreplanens krav om "*inddragelse og diskussion af videnskabsteoretiske spørgsmål og matematiske metoder*" under supplerende stof.

Spørgsmålet inviterer eleven til at reflektere bredere over matematikfaget, herunder hvad der særligt karakteriserer faget. Her kan oplagt tales om abstrakte objekter, symbolsprog, præcise definitioner, stringente ræsonnementer, men også om matematikkens utrolige anvendelighed. Har man haft et forløb om den egentlige matematikfilosofi, kan spørgsmål om eksistens og erkendelse inddrages.

Det forventes af eleven at begrebsparret *deduktiv-induktiv* anvendes i relation til fagets metoder. Her kan der eksempelvis tales om ræsonnementer og analytisk problemløsning (deduktive metoder) og om numerisk/grafisk problemløsning og eksperimenter (induktive metoder).

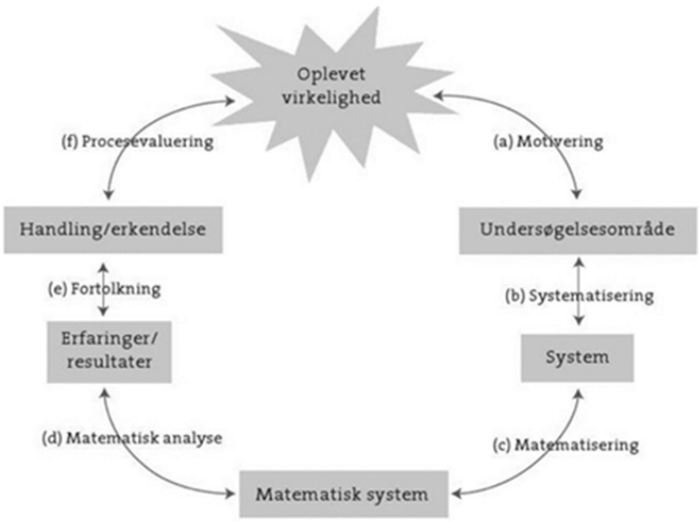
I redegørelsen forventes eleven at give et bevis for Pythagoras' sætning, som er dybt nok til at det baseres på Euklids fem aksiomer for klassisk geometri. Beviset kan tage afsæt i figuren til højre og herefter gå til bevis for vinkelsum i trekant, og mere grundlæggende sætninger, der kan vises ved at trække på visse aksiomer og definitioner.



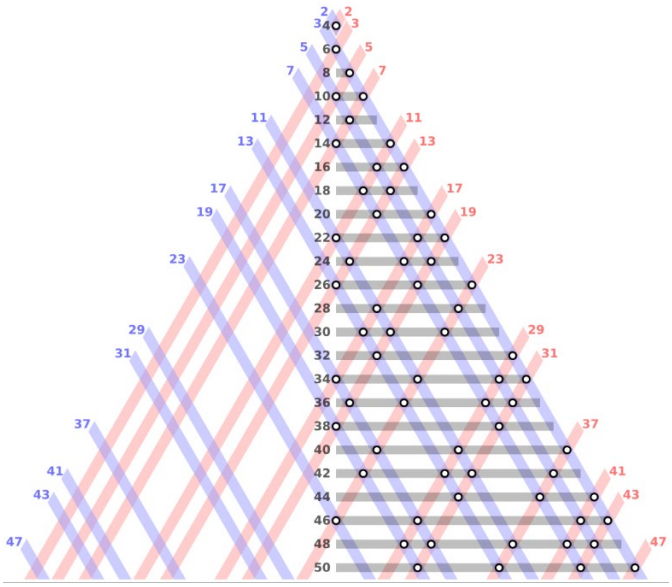
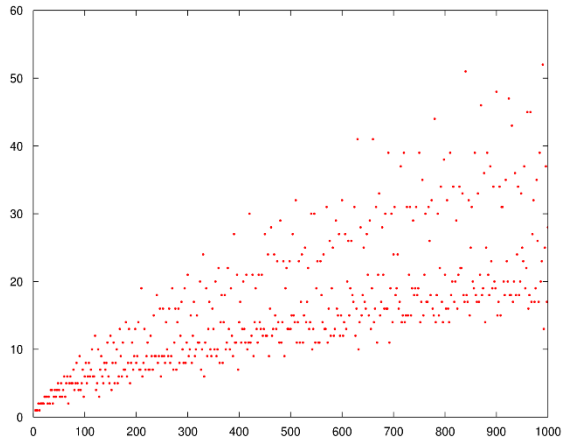
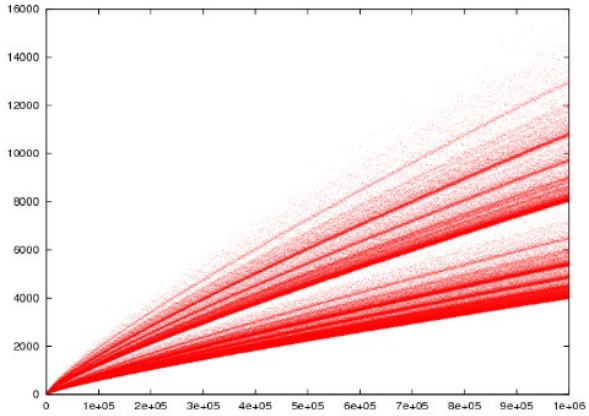
Bilaget giver mulighed for at tale om matematisk modellering, bevistypen "induktionsbevis", som kan diskuteres ind i distinktionen "deduktiv-induktiv" samt induktive arbejdsmetoder omkring Goldbachs formodning (som vil kræve en grundig særskilt behandling i undervisningen).

I samtalen om Goldbachs formodning kan man dels tale om indholdet i påstanden, samt det forhold at man ikke har kunnet lave et stringent bevis for den. Samtidig er den ved beregning vist at gælde for alle tal op til 4 trillioner ($4 \cdot 10^{18}$). De to grafer viser i forskelligt zoom, hvordan antallet af talpar (andenaksen) der giver et bestemt lige tal (førsteaksen) vokser i det område det er undersøgt. Det kan diskuteres hvor sikre vi i matematik tør være på noget, der har så overbevisende "evidens"?

Bilag: Matematikkens videnskabsteori



$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= 2x \\
(x^3)' &= 3x^2 \\
(x^4)' &= 4x^3 \\
(x^5)' &= 5x^4 \\
&\vdots \\
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \\
(x^{n+1})' &= (n+1) \cdot x^n
\end{aligned}
$$

Ethvert lige tal større end 2 kan skrives som en sum af to primtal.

Figurerne til højre viser udviklingen i hvor mange par af primtal, hvis sum danner et givet lige tal.