Oversigt over begreber om metoder og basal videnskabsteori i SRP med matematik

2020

Kasper Bjering Søby Jensen

For Fagkonsulenten i Matematik, Børne- og Undervisningsministeriet

<u>**Om forfatteren til denne tekst**</u>

Kasper Bjering Søby Jensen (f. 1980)

Cand.scient. i Matematik og Fysik

Ph.d. i matematikkens didaktik.

Lektor ved Roskilde Katedralskole

1. Indledning

Denne tekst er skrevet til gymnasieelever på STX-uddannelsens 3. år, der har skrevet et studieretningsprojekt (SRP) med faget matematik, og som nu forbereder sig til den mundtlige prøve. Teksten kan også læses af elever, der overvejer at lave en SRP med faget matematik.

Teksten præsenterer et begrebsapparat, der kan anvendes til at tale om *metoder* og *basal videnskabsteori*. Teksten er en oversigt over begreber præsenteret i publikationen "*At skrive SRP i, med og om matematik*". For en grundigere præsentation af begreberne samt eksempler på hvordan forskellige SRP-problemstillinger trækker på begreberne, henvises til denne på https://emu.dk/stx/matematik/fra-fagkonsulenten.

SRP-læreplanen har et krav om, at eleven til den mundtlige prøve skal kunne:

»foretage metodiske, tværfaglige og basale videnskabsteoretiske overvejelser i forbindelse med projektet og valg af indgående fag, herunder argumentation for eventuelt valg af ét fag.«

Der er ikke noget eksplicit krav om at inddrage disse overvejelser i den skriftlige del af projektet, selvom det naturligvis ikke er forbudt. Teksten her har derfor netop særlig relevans for den elev, der skal forberede sig til den mundtlige prøve.

Kasper Bjering Søby Jensen
Ishøj, april 2020.

2. Hvad er *en metode*?

I denne tekst opfattes en *metode* som noget konkret. En metode er det man har gjort, for at svare på et konkret *fagligt* spørgsmål. En metode er altså ikke en generel abstrakt ting, men noget der er konkret og afhænger af hvad man faktisk har foretaget sig.

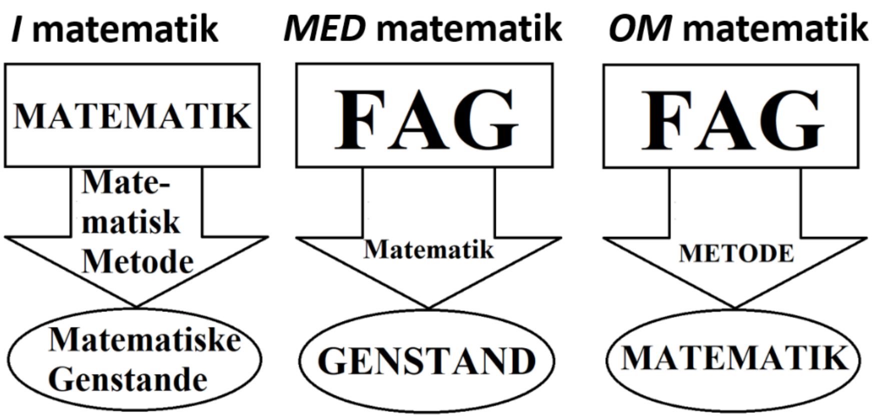
Når man skal besvare et konkret *fagligt* spørgsmål, så laver man en konkret metode til at finde svaret på netop dette spørgsmål. Metoden kan altså kun præsenteres sammen med spørgsmålet. Og beskrivelsen af metoden må altså altid tage udgangspunkt i det konkrete faglige spørgsmål.

Når man til den mundtlige prøve i SRP skal præsentere sin metode og metodiske overvejelser, skal det altså handle om besvarelse af konkrete spørgsmål. Hvis det man siger, kunne være sagt af andre, der har besvaret andre spørgsmål, så er metoden altså ikke beskrevet konkret nok.

Valget af metode inden for matematik, afhænger i første omgang af hvilken rolle (eller hvilke roller) faget spiller i besvarelsen af spørgsmålet. Der skelnes her mellem tre roller:

> ***I matematik***: Spørgsmål der omhandler matematikkens egne genstande og egen teori kræver, at man arbejder *i matematik*. Det vil sige at der arbejdes med matematikkens egne metoder til at opnå viden om de genstande, som matematikken særligt undersøger.
>
> ***MED matematik***: Spørgsmål i andre fag, der omhandler dette andet fags genstande, men hvor matematik bruges som værktøj af dette fag, til at besvare spørgsmålet. Matematik bliver altså til en metode benyttet af et andet fag eller vidensområde.
>
> ***OM matematik***: Spørgsmål der stilles om faget matematik, som kræver at et andet fag bringer sine metoder i spil, for at studere faget matematik som en genstand. Matematik bliver altså til en genstand, der hører til i et andet fag og derfor kan studeres af dette fag.

I figuren herunder er disse tre roller forsøgt opstillet skematisk som: Fag, metode og genstad.



3. Metode til arbejde *i matematik*

Matematikkens genstande er særlige, fordi de ikke har fysisk form. Vi kan altså hverken se, høre eller mærke dem. Vi kan heller ikke måle på dem med et måleapparat. Matematikkens genstande er abstrakte objekter, som kun eksisterer i vores tanker, når vi skal undersøge dem.

Derfor skal matematikkens metoder kunne studere sådanne objekter. Herunder følger otte konkrete begreber, som kan bruges til at beskrive og reflektere over metoder anvendt *i matematik*, til at undersøge matematiske objekter og besvare matematikfaglige spørgsmål om disse.

1. **Notation**
   Det matematiske symbolsprog er et særkende ved matematikken og et centralt redskab til at gøre matematikkens abstrakte genstande begribelige. Indførelse af symbolsk notation er således en central del af en matematisk metode.

2. **Begrebsafklaring**
   Fordi matematikkens genstande er abstrakte, er det helt centralt at være meget præcis i afgrænsningen af hvad der menes med et konkret begreb. Vi kalder ofte sådanne afklaringer for *definitioner*. Begreberne er som udgangspunkt vores eneste adgang til at undersøge objektet, så den præcise begrebsafklaring er en central del af en matematisk metode.

3. **Teorifremstilling**
   En matematisk teori er den samlede viden vi har opnået om bestemte matematiske genstande. En matematisk teori består typisk af det, der kaldes *sætninger*. Da enhver matematisk undersøgelse ikke kan starte helt fra bunden, er det at kunne lave en passende fremstilling af eksisterende matematisk teori, en central del af en matematisk metode.

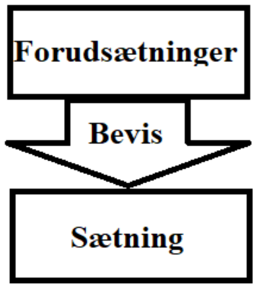
4. **Problemløsning**
   I matematik løser vi ofte konkrete matematiske problemer. I sådanne processer kan det være godt at skelne aktivt mellem tre typer af matematisk problemløsning:

Analytisk løsning:	Når et problem løses ved udledninger, omskrivninger og andre former for manipulation med matematiske symboler.
Numerisk løsning:	Når et problem løses ved systematiske beregninger, som gradvist indkredser svaret med stadigt større præcision.
Grafisk løsning:	Når et problem løses ved brug af grafiske fremstillinger, f.eks. grafer for funktioner, geometriske tegninger og statistiske diagrammer.

5. **Ræsonnement**

Det matematiske ræsonnement er når man ud fra kendt matematisk teori slutter, at fordi der gælder én bestemt ting (grundlaget), så må der nødvendigvis også gælde en anden bestemt ting (resultatet). Ræsonnementet er ofte bygget over såkaldte *implikationer*, det vil sige argumenter af typen ”hvis A, så B”. Ræsonnementer er centrale i de fleste matematiske metoder.

6. **Bevis**



Beviset er en særlig type af ræsonnement, som anvendes til at godtgøre at matematisk teori er korrekt. Det er således almindeligvis *sætninger* som der føres *bevis* for. Det er metodisk centralt i fremstillingen af et bevis, at man redegør præcist for det, der går *forud* for sætningen, kaldet *forudsætninger*. Her bør man aktivt kunne skelne mellem 1) *definitioner*, 2) *aksiomer*, 3) *tidligere viste sætninger* og 4) *antagelser*.

Beviser er ofte en meget central del af en matematisk metode og bør følges af, at man aktivt diskuterer hvilken type bevis der indgår i metoden. Her er en liste med de mest almindelige:

Direkte bevis:	Når der fra et udgangspunkt sluttes skridt for skridt frem til beviset. Typisk på formen ”Hvis A_1, så A_2, hvis A_2, så A_3, og så videre til hvis A_{n-1} så A_n” og deraf kan samlet sluttes at ”Hvis A_1, så A_n”.
Induktionsbevis:	Når man viser, at hvis en bestemt egenskab gælder for tallet n, så gælder det også for $n+1$. Dernæst vises, at det gælder for $n=1$, og deraf kan sluttes at det gælder for $n=2$, $n=3$, $n=4$, osv.
Modstridsbevis:	Hvis en antagelse om at A gælder fører frem til, at der gælder både B og ikke-B, så er der modstrid og derfor må der gælde ikke-A.
Kontraposition:	Hvis man kan vise, at der gælder ”Hvis ikke-B, så ikke-A”, så har man ved kontraposition vist, at der gælder ”Hvis A, så B”.
Modeksempel:	Hvis man vil modbevise at en egenskab gælder for alle x, så er det nok at give ét eksempel på et x uden egenskaben, så har man ved *modeksempel* bevist, at ikke alle x har egenskaben.

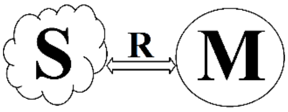
7. **Eksperiment**

Et eksperiment er almindeligvis en afprøvning af, hvad en bestemt parameter betyder i en konkret situation, ved at fastholde alle andre parametre konstante og lade den afprøvede parameter variere på en systematisk måde. Eksperimenter kan indgå i en matematisk metode.

8. **Eksempel**

At udarbejde et eksempel til illustration af et symbol, et begreb, en sætning eller et andet stykke matematik, kan inddrages i en matematisk metode, f.eks. for at dokumentere forståelse.

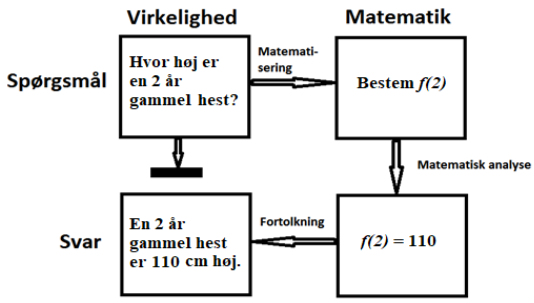
4. Metode til arbejde *med matematik*



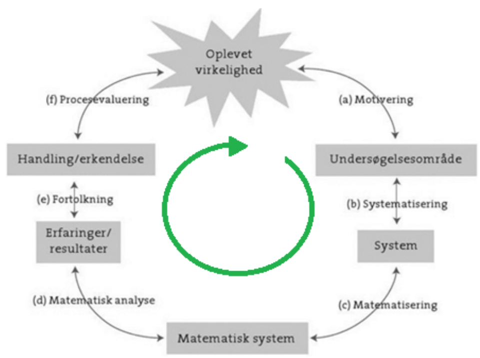
Når matematik anvendes til at beskrive forhold uden for matematikken, sker det altid ved at bruge en *matematisk model*, som er en sammenkobling mellem et udsnit af virkeligheden S og noget matematik M.
Sammenkoblingen R forbinder objekter og relationer i S med tilsvarende i M.

Her beskrives fem begreber, som kan indgå i en metode til at arbejde *med matematik*.

1. Modelanvendelse
Anvendelsen af en model er en central del af at bruge matematik som en metode i andre fag. Anvendelsen gennemløber tre delprocesser: 1) *Matematisering*, 2) *Matematisk analyse* og 3) *Fortolkning*. Disse tre delprocesser kan eksplicit inddrages i formuleringen af metoden til at arbejde *med* matematik.



2. Modellering
Når man opstiller en matematisk model, kaldes processen for *modellering*. Figuren til højre viser modelleringscirklen med seks delprocesser i en modellering, som en cirkulær bevægelse. Det viser at en god modellering tit kræver, at den samlede proces gennemløbes flere gange. I en opstilling af en matematisk model, bør man aktivt inddrage disse delprocesser i diskussionen af modelleringen.



3. Modelanalyse
Hvis man bruger en model andre har lavet, kan det være nødvendigt at kortlægge hvordan den er blevet til. Her starter man nederst i modelleringscirklen og bevæger sig ”baglæns” for at kortlægge, hvad de forskellige dele af den matematiske model repræsenterer i virkeligheden.

4. Modelvurdering
Hvis man evaluerer på om en model, andre har lavet, faktisk kan bruges til det formål, man har intention om, så er der tale om en *modelvurdering*.

5. Modelkritik
Hvis man forsøger at komme ned under grundlaget for en matematisk model, f.eks. for at undersøge om der under den ligger nogle bevidste valg styret af bestemte interesser (f.eks. politiske eller økonomiske), så er der tale om en *modelkritik*.

5. Metode til arbejde *om matematik*

Når der arbejdes *om matematik* er formålet at studere matematikken, som en genstand i sig selv. Det kræver en metode hentet uden for matematikken, typisk fra et andet fag. Det vil imidlertid være nødvendigt, at disse metoder tilpasses til, at formålet er at arbejde *om matematik*. Det kan f.eks. være ved at inddrage aspekter af arbejde *i* og/eller *med matematik*.

Der skelnes mellem tre forskellige typer af arbejde *om matematik*:

1. Studier af matematikken i sig selv

Det kan være, at man med historiefaglige metoder undersøger matematikkens historie eller, at man med danskfaglige metoder undersøger, hvordan matematik kan formidles. Der vil altså her være brug for at beskrive, hvordan metoder fra historie eller dansk konkret anvendes til at undersøge matematikken. I den beskrivelse vil der være behov for at inddrage matematisk viden og matematiske metoder, hvilket gør undersøgelsesmetoden to-faglig. I denne inddragelse kan der trækkes på begreberne som beskriver metoder til arbejde *i* og/eller *med matematik*.

2. Studier af matematikkens rolle

Matematik kan spille en rolle i mange forskellige forhold. Det kan være i en historisk begivenhed, et litterært værk, et stykke kunst eller arkitektur, i religion og mange andre steder. En undersøgelse af denne rolle vil typisk kræve metoder fra andre fag (f.eks. historie, dansk, billedkunst eller religion), til at undersøge det fænomen hvor matematikken spiller en rolle, samt metoder fra såvel arbejde *i* som *med* matematik, til at kunne undersøge den konkrete rolle matematikken spiller. Metoden i en undersøgelse som denne, vil typisk være denne helhed af elementer fra to fag.

3. Sammenligning af matematik og andet fag

Hvis man har et bestemt begreb eller fænomen, der findes i både matematik og i et andet fag, så har man mulighed for at lave en sammenligning af de to fags måde at bruge begrebet eller fænomenet på. Det kunne f.eks. være begrebet *uendelighed* anvendt i henholdsvis matematik og dansk, eller *eksperimentets* rolle i matematik i forhold til i fysik. Her kan det andet fag typisk ikke levere metoden til undersøgelsen. I stedet må man selv formulere en brugbar metode, som naturligvis må trække på metoder hentet fra såvel (*i* og/eller *med*) matematik, som fra det andet fag.

6. Basal videnskabsteori og matematik

I den *basale videnskabsteori* hæver vi os op over de konkrete metoder og sætter dem ind i en bredere videnskabelig sammenhæng. Det vil vi her gøre ved at anvende en række begrebspar, som kan bruges til på tværs af fagene at beskrive træk ved deres forskellige metoder.

1. **Real vs. Formal videnskab**

Matematik beskrives ofte som et *formalvidenskabeligt* fag, fordi man i matematikken studerer objekter der ikke har fysisk eksistens. I stedet studeres *formelle* egenskaber ved abstrakte objekter. Når der arbejdes *med matematik* i andre fag, får faget dog *realvidenskabelig* karakter.

2. **Empirisk vs. Analytisk viden**

Empirisk viden er indhøstet ved hjælp af *erfaring*, mens *analytisk* viden er indhøstet ved hjælp af *tænkning*. Den viden der opnås når der arbejdes *i matematik* er således analytisk.

Når der arbejdes *med matematik*, vil vi skelne mellem *analytiske modeller*, som er opstillet ud fra antagelser, der enten kommer fra en velbegrundet forventning, eller fra velkonsolideret teori hentet i et andet fag, og *empiriske modeller*, som baserer sig på data opsamlet ved erfaring.

Inden for empiriske metoder skelnes ofte mellem *eksperimentelle* metoder, hvor erfaringer indhøstes ved systematisk at kontrollere variationer i de parametre, der optræder i undersøgelsen, og så *observationelle* metoder, hvor man har ingen eller meget lille kontrol over variationen.

3. **Deduktive vs. Induktive slutninger**

Almindeligvis forstås ved *deduktiv slutning*, at der sluttes fra en generel regel til hvad der må gælder i konkrete tilfælde, mens *induktiv slutning* betyder, at der sluttes fra et antal konkrete tilfælde til hvad der må gælde generelt. I matematik betyder *deduktiv* dog ofte, at vi fra kendte og accepterede generelle regler slutter os til nye generelle regler. Så i matematik beskriver begreberne alene om vi slutter fra en generel regel eller fra konkrete tilfælde, ikke hvad vi slutter til.

Ofte taler man i matematik om *aksiomatisk-deduktive* metoder, som det helt centrale i faget. Det er f.eks. det der beskriver ideen i de fleste beviser, hvor man udleder en hel stribe af sætninger, ud fra nogle få (velvalgte) aksiomer, der regnes for så simple, at de ikke behøver et bevis.

Man kan dog også i matematik benytte *hypotetisk-deduktive* metoder, hvor man fra en hypotese udleder en nødvendig konsekvens og derpå undersøger om denne holder. Også *induktive* metoder kan bruges i matematik, blot man tager forbehold for, at de ikke giver os endelig og sikker viden.