RÅD OG VINK TIL SRP MED MATEMATIK

- En lærerhåndbog -

Januar 2020

For fagkonsulenten i Matematik, Børne- og undervisningsministeriet.
emu.dk

INDHOLDSFORTEGNELSE

FORORD

Nærværende håndbog er tænkt til den underviser, som er vejleder på et SRP-projekt med matematik, og som skal udforme den endelige opgaveformulering til eleven. Håndbogen er en måde at klæde vejleder på til at lave en god eller bedre opgaveformulering. Den er *ikke* et inspirationskatalog, der skal vise bredden og mulighederne med matematik.

Håndbogen falder i to dele: I første del udfoldes de formelle rammer for projektet med fokus på matematik, og i sidste del præsenteres og kommenteres gode opgaveformuleringer i forskellige fagkombinationer. Det er denne sidste del, der kan kvalificere vejlederens arbejde med at lave opgaveformuleringer.

Der drages løbende paralleller til den netop udgivne rapport "Metoder og Videnskabsteori i, med og om matematik" af Larsen og Jensen. Rapporten går i dybden med blandt andet metode og videnskabsteori i matematik. Denne håndbog indbefatter en del af pointerne herfra, men kan læses og anvendes uafhængigt af rapporten.

På side 25 findes en anvendelig **tjekliste** med en række korte spørgsmål, man kan benytte til at kvalitetssikre en endelig opgaveformulering.

Om forfatteren

Hans Damm-Jakobsen (f. 1983)

Forfatteren er cand.scient. i matematik og engelsk, lektor ved Aarhus Katedralskole siden 2010, skriftlig censor i matematik og SRP, kursusholder, underviser på det fagdidaktiske modul i pædagogikumuddannelsen og tidligere medlem af Matematiklærerforeningens styrelse.

DEL I

OM RAMMERNE

1.1 AT ARBEJDE MED EN KOMPLEKS FAGLIG PROBLEMSTILLING

Matematik indgår i SRP på følgende måder:

<table>
<tr><th colspan="2">MATEMATIK</th><th>MULIGHED</th></tr>
<tr><td colspan="2">Studieretningsfag →</td><td>med et andet, vilkårligt fag
eller enkeltfaglig[1]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ikke studie-
retningsfag →</td><td>A-niveau →</td><td>med et andet studieretningsfag
eller enkeltfaglig</td></tr>
<tr><td>C- eller B-niveau →</td><td>med et studieretningsfag på A-niveau</td></tr>
</table>

Læreplanen siger, at SRP skrives inden for et område og en faglig problemstilling, der giver mulighed for fagligt samspil mellem to fag, eleven har eller har haft[2]. Til både det skriftlige og mundtlige produkt knytter sig en række faglige mål, som er generelle for alle fag, og som Vejledningen beskriver nærmere. I stedet behandler håndbogen, hvad en (god) kompleks faglig problemstilling er, herunder inddragelse af metoder og basal videnskabsteori.

Det er et fagligt mål i SRP, hvad enten den er flerfaglig eller enkeltfaglig, at eleven kan fordybe sig i 'en kompleks faglig problemstilling'.En *problemstilling* viser sig ofte som et spørgsmål, problem, paradoks, tankeeksperiment, som kræver (to) fag at arbejde med. Det vil typisk ikke være nok blot med en overskrift for projektet, idet elevens mulighed for at arbejde undersøgende og flerfagligt vanskeliggøres. Det er derfor en god idé at have et overordnet spørgsmål, som opgaven faktisk *svarer på*, og som målretter elevens arbejde og projektet. Dette overordnede spørgsmål indeholder ofte en undren, der ses sprogligt i formuleringer som 'hvordan kan det være…' eller 'hvorfor…' Et eksempel kunne være en opgave stillet i matematik og samfundsfag med spørgsmålet '*Er højere cigaretpriser vejen til regeringens mål om færre unge rygere?*'[3]. Matematikken heri kunne være en redegørelse for og anvendelse af priselasticitet i matematisk kontekst, og spørgsmålet udgør et problem, som fagene kan 'svare' på. Det giver eleven mere at skyde med, end hvis opgaveformuleringen har overskriften 'Cigaretpriser og priselasticitet'.

At problemstillingen er *kompleks* dækker over, at der ofte er flere veje til svaret, at problemstillingen (spørgsmålet) ikke har et enkelt eller ligetil svar, og at svaret kræver en uddybning/diskussion af, hvor og

[1] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017): "I sidste fald sker det efter vejleders godkendelse som konsekvens af, at det valgte område og problemstilling bedst egner sig til et enkeltfagligt projekt, og at eleven stadig kan honorere de givne krav til metode."
[2] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017), side 2.
[3] Se den fulde opgaveformulering på side 20.

hvordan svaret er brugbart. I eksemplet med priselasticitet kan der ligge antagelser og valg til grund for anvendelsen og behandlingen af problemstillingen og det brugte materiale, som nødvendigvis må belyses og diskuteres, hvis projektets konklusioner skal være brugbare. Det kan være, at man i opgaven kun bruger data for udvalgte befolkningsgrupper. Der kan komme en fin diskussion ud af at være bevidst om, at den matematiske modellering ikke kan 'opdage' en sådan bias. Kompleksiteten kommer altså til udtryk dels ved en grundighed i problembehandlingen i opgavebesvarelsen, dels ved at det overordnede spørgsmål kræver til- og fravalg ifm. materiale og metode og ikke er for lukket.

At problemstillingen skal være *faglig* betyder, dels at de deltagende fag er tydeligt repræsenterede i opgaveformuleringen. De behøver ikke nødvendigvis være tydelige i det overordnede spørgsmål, men tydelige i udfoldelsen af det. For eleven indeholder matematik den udfordring, at der er brug for en anden type matematik i en SRP end i fagets typiske skriftlige genrer/opgaveregning. De er ikke vant til at skulle fremstille (relevant) teori og målrette det. Derfor handler SRP ofte om til- og fravalg i formidling, fx hvor meget teori skal præsenteres, hvor skal ræsonnementer optræde, hvor meget skal modelleringen udfoldes osv. *Man kan med fordel tage dette element op i løbet af vejledningen*, så eleven ser en rød tråd fra vejledningen og til den endelig opgaveformulering, hvori der ikke er plads til så detaljerede anvisninger. For de fleste SRP'er vil matematik indgå med to dimensioner: En **vertikal** dimension udgjort af den faglige dybde, og en **horisontal** dimension udgjort af flerfaglighed, evt. modelantagelser og modelleringsproces, sammenhæng med problemstilling og valg af metode. Begge kan man med fordel komme omkring i vejledningen.

Eleven er ikke vant til at skulle bearbejde og fremstille matematisk teori i det omfang, SRP'en kræver. Udvælgelse og tilpasning er påkrævet, og det er umuligt at opfylde kravene ved bare at gengive fem sammenhængende sider af en temabog/grundbog. Den faldgrube vil indebære, at eleven ikke får tilstrækkelig mulighed for at vise f.eks. ræsonnement eller problembehandling. Det er afgørende for vejledningens succes, at eleven er klar over, hvad det vil sige at skrive en matematisk tekst. Såfremt eleven tidligere har haft matematik med i f.eks SRO, er det naturligt at genkalde pointerne og kravene herfra. Der kan desuden være erfaring at hente fra de samspil på B- og A-niveau, som faget har indgået i. Man kan med fordel så tidligt i vejledningen som muligt sikre, at eleven har mulighed for at udvælge og afgrænse materiale og ved, hvilket materiale/stof fra matematik, der er relevant for behandlingen af problemstillingen. Denne vigtige del af SRP-processen bliver behandlet i næste afsnit.

Afslutningsvis skal det nævnes, at en god opgaveformulering med en klar rød tråd gør det lettere for eleven at skabe en sammenhængende besvarelse, som stemmer overens med opgaveformuleringen.

1.2 OM KOMPETENCER OG METODER

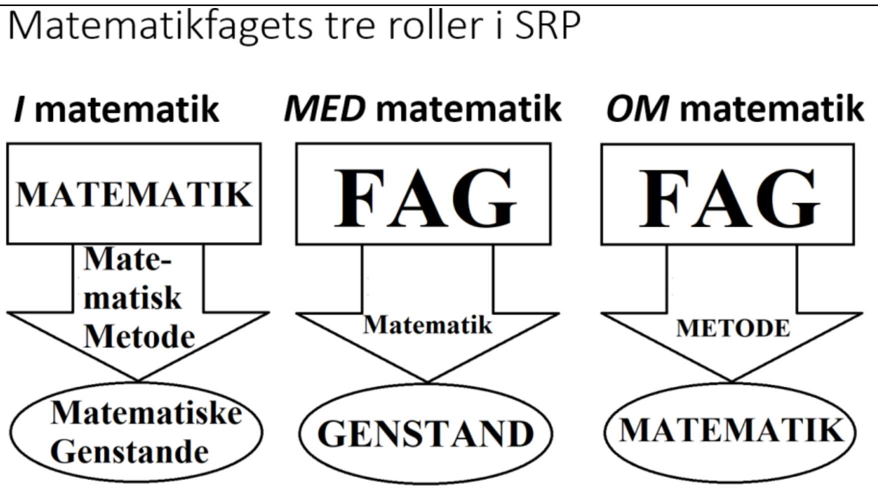
Matematik spænder over forskelligartede kompetencer og metoder, og ikke alle kan være til stede i en SRP. Som udgangspunkt vil ræsonnementskompetence og tankegangskompetence altid være repræsenteret, idet matematisk argumentation og tankegang er uundgåelige, når man fordyber sig i faget. I dette afsnit bliver kompetencer og metoder berørt overordnet, mens en dybdegående behandling af emnet findes i (Larsen & Jensen, 2019), som har en underindeling og mangfoldiggørelse af metodebegrebet.

Når matematik er med i en SRP, stiller vi typisk krav til faget på to niveauer, delvis svarende til den vertikale og horisontale dimension nævnt i afsnit 1.1: Vi ser efter den faglige dybde ved logisk, struktureret, deduktiv fremstilling af et matematisk emne med tilhørende demonstration af relevante kompetencer, ikke mindst ræsonnementskompetencen. Vejledningen præciserer, at en redegørelse er fagets højeste taksonomiske niveau og indebærer bevisførelse og ræsonnement. Efterspørges en matematisk redegørelse i en opgaveformulering, lægges vægten altså på 'Definition-Sætning-Bevis-matematik', og ræsonnementskompetencen skal vises og vurderes. Det er en risiko, at eleven i god tro kommer til at gengive en anden forfatters tankerække: Det giver korrekt matematik, men ikke selvstændighed. Ofte består kravet til ræsonnement i, at eleven 'udfylder huller' i forlæggets fremstilling, men det kan også indbefatte elevens egen argumentation, rækkefølge, eksempelbrug samt notation. Eleven bør derfor vejledes til at vise god matematisk formidling og opgavebesvarelse ved f.eks. passende eksempelinddragelse, selvstændig sortering af stoffet samt bearbejdet bevisførelse. Det er derfor en god ide, hvis vejledningen tydeliggør disse forventninger, og at vejledere er bekendt med elevens primære materiale og tekstforlæg.

Desuden er der den horisontale dimension, hvor matematik bringes i spil ifm. et andet fag. Her ses ofte andre kompetencer i spil. I en opgaveformulering er der ofte et krav om at bygge en model (se håndbogens del II), og hermed forstås også modelleringsprocessens detaljer. De må ikke undervurderes: Det hører altid med, hvad modellen er en model *af*. Hvis vægten lægges på modelleringsprocessen, indgår derfor antagelser, brug, modelrækkevidde mv. Dele af dette dukker op igen i opgavens sidste/diskuterende del, hvor overvejelser om modelbrug finder en naturlig plads. Dette kan med fordel tydeliggøres i vejledningen. Ofte indeholder grundbøger ikke eksplicitte afsnit om, hvad det vil sige at modellere, men forudsætter det kendt, og vejlederen kan til gavn for eleven pege på materiale, der beskriver eller illustrerer modelleringsprocessen.

I den samlede SRP er matematik repræsenteret på forskellig vis: Måske viser eleven i en matematisk redegørelse ræsonnement og formidling (jf. tidligere), og i modelleringsdelen andre kompetencer. Det første kan karakteriseres som matematisk arbejde *i* faget, hvor det sidste ses som arbejde *med* faget[4], og metoderne - den måde der arbejdes på i/med faget - er tydeligvis forskellige. I en redegørelse arbejder eleven deduktivt/teoriopbyggende med konsistent notation og begrebsbrug (det kan være krævende at sammenskrive flere fremstillinger til én): Det at arbejde *i* matematik[5]. I modelleringsdelen er modellering en metode i sig selv.

Det viser sig nyttigt at benytte den sprogbrugen *i*, *med* og *om* matematik som betegnelser for fagets forskellige sider:



Figur fra Jens Christian Larsens oplæg på Matematiklærerforeningen regionalkurser 2019, med udgangspunkt i (Larsen & Jensen, 2019)

Der kan opstå begrebsforvirring, idet matematik har mange 'metoder' indlejret i faget, f.eks. numeriske metoder (Newton-Raphson metode osv.). Der er i faget tradition for at kalde visse processer eller algoritmer for metoder, men i SRP-sammenhæng udgør modelleringsprocessen i sig selv en metode. Faktisk er metoderne i matematik, hvis eleven har fordybet sig i det faglige arbejde, ganske tydelige og lægger derfor naturligt op til en *konkret* snak om metode og videnskabsteori ved den mundtlige prøve, som det er tiltænkt. Spørgsmål såsom "Hvordan skabes viden i matematik?" eller "Hvordan arbejder faget?" falder naturligt ud af det skriftlige produkt. *Simulering* som metode til matematisk indsigt er også en mulighed, der oftest indbefatter CAS-brug. Simuleringen i forbindelse med statistik og vurdering af nulhypotese er en mulighed, og eleven har et umiddelbart springbræt til at tale om, hvilken matematik der skabes ved simulering. Det vil også være muligt at drøfte fordele/ulemper/forskelligheder ved empiriske eksperimenter og simuleringer af selvsamme.

[4] Se (Larsen & Jensen, 2019) for en længere fremstilling af sondringen *i* matematik, *med* matematik og *om* matematik.
[5] Se i øvrigt (Larsen & Jensen, 2019) afsnit 3.1.

1.3 FRA PROBLEMFORMULERING TIL OPGAVEFORMULERING

Eleven udarbejder i løbet af vejledningen en problemformulering. Afsnittet sætter fokus på vejledningens forventelige spørgsmål samt elevens arbejde med matematik i problemformuleringen.

For eleven vil matematik i SRP være anderledes end den skriftlige matematik, de er vant til at arbejde med. Det samme gør sig ikke gældende i samme grad i en række andre fag: I mange humanistiske fag arbejdes i grove træk i samme genre som i elevens tidligere afleveringer, bare på en noget større skala. Det er en fordel, hvis undervisningen over de tre år og særligt i 3.g fokuserer på fagets forskellige skriftlige genrer, og det er en god ide, hvis en del af fordybelsestiden særligt i starten af 3.g går til skriftlige arbejde, som på forskellig vis tematiserer og tydeliggør, hvordan matematisk formidling tager sig ud, når det *ikke* er opgaveregning. Det gør sig i særlig grad gældende, hvis ikke matematik er indgået i flerfaglige projekter/SRO tidligere. Eleverne får herved mulighed for at få en idé om SRP i faget, og det kvalificerer arbejdet op til valg af fag samt af vejledningsprocessen, hvor spørgsmål og vejledning kan blive mere fokuseret. Læreren i faget kan med fordel vise og drøfte udvalgte opgave- og problemformuleringer med klassen og danne grundlag for elevens selvstændige refleksion over muligheder i faget.

Selve problemformuleringen vil indeholde et overordnet spørgsmål eller problemstilling og en række underordnede spørgsmål eller konkretiseringer, der er nødvendige for at kunne besvare det overordnede spørgsmål. Problemformuleringen er et arbejdsredskab i løbet af vejledningen, og det er en fordel, hvis den findes som et deledokument eller på anden vis er let tilgængelig for både elev og vejleder. Problemformuleringen kan og bør ændre sig undervejs i vejledningen, i takt med at eleven definerer og afgrænser projektet rent fagligt.

I vejledningen afklares spørgsmål om, hvor og hvordan matematik skal indgå, og der foreslås forskellige valg af materiale, som kvalitetsvurderes ud fra en forudsætning om, at den pågældende elev kan håndtere det matematiske indhold og symbolbrug. Det er vigtigt at gøre klart, at det er muligt for eleven at tydeliggøre i problemformuleringen, hvordan eleven ønsker vægtningen i opgaveformuleringen. I vejledningen sikres det, at eleven selv bidrager til en afgrænsning og formulering af projektet. Dog vil det være en fordel for alle, hvis eleven er grundig i sin præsentation af materiale så vejledningen bliver fokuseret, idet det er vanskeligt for eleven selv at vurdere sværhedsgraden af et givet emne i matematik. En typisk udfordring for både elev og lærer(e) er herudover de store mængder materiale på nettet. Der er masser af godt materiale, men særligt i matematik er det ekstremt svært for eleven selv at vurdere kvaliteten, brugbarheden og sværhedsgraden af materialet. Her må vejledningen klarlægge dette.

Vejlederne skal sikre et ukendt element i opgaveformuleringen, der ofte tager form af et ukendt aspekt ved kendt/brugt materiale eller et ukendt bilagsmateriale[6]. Det vil altid være afhængigt af det konkrete projekt, men i matematik er der mulighed for at supplere eksempelvis med et ukendt datasæt eller måske en artikel fra nettet, som ligger i forlængelse af emnet. Der er inspiration at hente i forskellige fagblade og fagportaler, eksempelvis Ingeniøren. Det ukendte materiale må ikke være på fremmedsprog.

1.4 DEN MUNDTLIGE PRØVE

Til den mundtlige prøve følges elevens præsentation af projektet og dets vigtigste konklusioner af en samtale, hvori der skal 'indgå metodiske og basale videnskabsteoretiske overvejelser'[7]. Desuden indgår der en begrundelse for valg af fag, også for den enkeltfaglige opgave. I det lys er det desto vigtigere, at eleven har en overordnet problemstilling, så fagene 'løser en opgave' og herved får en berettigelse. Det kan med fordel nævnes i vejledningen, at der i begrundelsen af fagvalg *ikke* er tale om en personlig præference, som nogle elever kan tro, men om en faglig tilstedeværelse, der nødvendiggøres af den pågældende problemstilling.

Det er ikke et krav, at der i det skriftlige produkt indgår et metodeafsnit. Det står eleven frit for, men de metodiske overvejelser skal altså være repræsenteret ved den mundtlige prøve, og de må derfor være en uomgåelig del af selve arbejdet med projektet. Om det kan anbefales for den enkelte elev at skrive et metodeafsnit afhænger af det enkelte projekt. I et projekt med stor vægt på modelleringsprocessen indgår der naturligt - også i det skriftlige produkt - en grundig behandling af modelleringens faser og antagelser, herunder metodiske valg og forudsætninger. I en enkeltfaglig opgave med vægt på det teoretiske-deduktive vil det - afhængigt af projektet - måske være mere naturligt at demonstrere til den mundtlige prøve, hvordan der er arbejdet, og hvilken type viden der er frembragt. Det er eksaminator og censor, der sikrer, at der til den mundtlige prøve samtales om metode og videnskabsteori, og matematik kan med fordel have forberedt spørgsmål, der leder naturligt ned i denne del.

Basal videnskabsteori er typisk noget, som den daglige undervisning sjældent beskæftiger sig med. Det skyldes nok, at fagene arbejder implicit med metode og viden og kun lejlighedsvis fremhæver dette. På sin vis er det til stede hele tiden og så alligevel ikke. Derfor kan det virke unaturligt og fremmed for eleven at skulle belyse dem, og det er afgørende, at vejledningen sikrer elevens mulighed for at arbejde med denne del af projektet. I SRP vil basal videnskabsteori være bundet til det konkrete arbejde, til de konkrete

[6] I en flerfaglig opgave relaterer bilaget sig til ét eller begge fag.
[7] (UVM, Vejledning srp, 2019), side 20.

metoder, men sat i en større ramme/perspektiv. Således er det en god idé (for vejleder og elev) at tænke basal videnskabsteori som 'metode 2.0', altså eksempelvis refleksioner over, hvad konkrete metoder bidrager med, og hvordan de enkelte fag forholder sig til disse. Fx arbejde med empiriske data: "Hvad gør matematik med sådan noget, hvad gør samfundsfag?" og "Hvad kan vi bruge empiri til i matematik?" Eleven kan så komme ind på gevinsten ved eksempelvis det eksperimenterende arbejde i matematik, som eleven har udført i projektet.

Enkelte skoler arbejder med konkrete begrebspar, der skal tydeliggøre forskellige former for viden, f.eks. deduktion-induktion, formel-empirisk. Disse begrebspar er brugbare på tværs af fag, men ikke alle er relevante for matematik. Således bør eleven være bevidst om kun at inddrage de (mest) relevante i præsentationen, hvis skolen lægger op til inddragelse af disse i projektet.

Endelig skal det nævnes, at eleven ikke i projektet står til ansvar for fagenes mål (herunder matematik) i *almindelighed*, men kun til den anvendte metode og/eller de relevante faglige mål. Det er derfor ikke muligt at spørge 'rundt' i faget, men hvis en oplagt metode er blevet fravalgt, kan man med fordel spørge til elevens valg af *hensigtmæssig* metode.

1.5 DEN ENKELTFAGLIGE OPGAVE

Når et projekt bliver enkeltfagligt, sker der efter en vurdering fra en vejleder eller fagkyndig lærer. Læreplanen siger, at "Til grund for godkendelsen skal lægges vejlederens skøn af områdets og den faglige problemstillings egnethed som henholdsvis fler- og enkeltfagligt projekt samt elevens mulighed for at inddrage metodiske og videnskabsteoretiske overvejelser i projektet"[8]. Som udgangspunkt kan eleven altså ikke komme og sige, at eleven vil skrive i ét fag. Der går en problemstilling eller fagligt område forud herfor. I kapitel 2.2 ses både en enkeltfaglig og flerfaglig mulighed for at arbejde med komplekse tal. I fald et projekt bliver enkeltfagligt er det en god idé, at vejleder og elev drøfter, hvordan matematik kan arbejde på flere måder, fx at der arbejdes med mindst to dimensioner af *i*, *med* og *om* matematik. Det vil oftest være let at opfylde og giver eleven mulighed for at vise forskelligartede metodiske overvejelser. Hvis der kun arbejdes *i* matematik, vil de metodiske og videnskabsteoriske overvejelser skulle demonstrere mere i en snævrere ramme. Det kunne være en mulighed for den gode elev til at vise detaljeret kendskab til matematikkens videnskabsteori, hvis eleven kan overveje fordele og ulemper ved forskellige former for notation og teorifremstilling[9].

[8] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017), side 2.

[9] I (Larsen & Jensen, 2019) defineres matematiks metoder som 'konkrete handlingsanvisninger', og notation og teorifremstilling som noget, vi gør i matematik. I den forstand er disse genstand for elevens videnskabsteoretiske refleksion.

1.6 MULIGHED FOR INNOVATION

Det bør naturligvis afklares i vejledningsfasen, om eleven ønsker at inddrage innovation. Hvis innovation inddrages, skal ”eksaminandens evne til at udvikle og vurdere [innovative] løsningsforslag [indgå] i bedømmelsen”[10], så valget forpligter altså både elev og bedømmere. Med et innovativt løsningsforslag forstås en løsning på et problem, der kan være fagligt, alment, konkret og/eller autentisk. Forslaget skal have værdi for andre og tilføre den konkrete sammenhæng noget nyt[11]. Det er værd at huske, at værdiskabelse ikke skal være *absolut*.

Det innovative element kan ligge i det ene eller begge fag. Ligger det i matematik, kan det ofte ske både *i* og *med* matematik. Det vanskelige både for elev og lærer ligger i at afklare, hvori det innovative består. Det kan med fordel drøftes med eleverne i tiden op til SRP-perioden. Det afgørende krav i formuleringen ovenfor er, at der skal være en *løsning* (og derfor et forudgående *problem*) og en *værdiskabelse*. Det er svært at vurdere, hvornår et projekt *i* matematik skaber værdi for andre, men man kan forestille sig en anderledes (re)præsentation af et bevis eller teori. Eleven vælger måske at simulere/eksperimentere sig frem til en bekræftelse af et matematisk resultat, som de også har bevist analytisk. Det giver en naturlig mulighed for at inddrage fagets forskellige metoder. Hvis eleven arbejder *med* matematik, kan innovation ske på forskellig vis: Eleven kan udarbejde et innovativt løsningsforslag til et autentisk problem, eksempelvis et trafikplanlægningsproblem med brug af operationsanalyse (tænk Travelling Salesman og grafteori) eller et svar på spørgsmålet: *Hvordan får vi danskerne til at købe flere el-biler?* Her er mulighederne mange, og der kan hentes inspiration fra andre fag, eksempelvis økonomifag, som har en problemløsende tilgang.

[10] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017).
[11] (UVM, Vejledning srp, 2019), side 6.

DEL II

DEN GODE OPGAVEFORMULERING

2.1 DEN GODE OPGAVEFORMULERING

Denne anden del af håndbogen indeholder råd til vejlederen om den *gode* opgaveformulering. Desuden præsenteres forslag til gode opgaveformuleringer, herunder enkeltfaglige opgaver og opgaver med matematik på c-niveau.

For fuldstændighedens skyld gengives hér læreplanens krav til opgaveformuleringen. Denne skal:

> *– gøre det muligt for eleven at opfylde de faglige mål for studieretningsprojektet*
> *– give mulighed for faglig fordybelse, der på væsentlige punkter ligger ud over undervisningen i mindst ét af projektets fag*
> *– skal inddrage nogle aspekter eller være ledsaget af bilag, der ikke er blevet drøftet med eleven under vejledningen og ikke indgår i elevens problemformulering*
> *– være konkret og afgrænset*
> *– indebære, at de(t) indgående fag anvendes på et passende niveau*
> *– være udformet således, at eleven har mulighed for at besvare opgaveformuleringen fyldestgørende inden for de tidsmæssige rammer for studieretningsprojektet.* [12]

For alle SRP'er er der et ufravigeligt omfangskrav på 15-20 normalsider. Dog optælles symbolsprog ikke på samme vis efter normalsidebegrebet! Hér foretages i stedet et skøn over omfanget. Det kan populært udtrykkes som 'en side er en side'[13], som også Vejledningen tydeliggør. Det obligatoriske resumé tæller med i sideantallet.

Når arbejdet med opgaveformuleringen starter, foreligger der som regel en brugbar problemformulering fra elevens hånd. Denne angiver et overordnet område eller spørgsmål, konkretiseringer, fx i form af underspørgsmål, samt materiale og metode. Typisk er problemformuleringen skrevet som en række spørgsmål eller pinde uden taksonomisk progression, der skal omformes til opgaveformuleringen. En opgaveformulering har ikke en given længde, men eksemplerne på de følgende sider viser spændvidden.

Opgaveformuleringen stiller eleven bedst, når den følger læreplanens krav om at være konkret, afgrænset og præcis, men *uden* at blive en decideret 'opskrift', som fratager eleven mulighed for selvstændighed. Uklare formuleringer og 'tilbud' bør undgås, dvs. undgå at bruge 'bør', 'kan', 'evt. inddrage' osv. I matematik bruger vi matematikfaglige ord, som ikke nødvendigvis ligner andre fags brug af samme ord. Det drejer sig primært om 'redegørelse', som bruges hyppigt i andre fag. I matematik inkluderer en redegørelse matematisk argumentation og ræsonnement. Derfor kan ordet *redegør* optræde i forskellige

---

[12] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017).
[13] (UVM, Vejledning srp, 2019), side 18.

betydninger i en opgaveformulering. Det giver heller ikke mening at bruge den sædvanlige taksonomiske tredeling i matematik. En matematisk redegørelse er det højeste taksonomiske niveau i matematik, og det skal eleven være bevidst om, da eleven forledes til at tro noget andet fra et andet fags tradition. Redegørelsen kan indledes med formuleringer såsom 'der ønskes en (matematisk) redegørelse', 'redegør for/gør rede for'. Man kan også ønske, at eleven 'indfører' noget teori, men kravet til matematisk redegørelse er i så fald mindre. Lægges vægten på matematisk modellering, kan dette beskrives ved 'opstil en matematisk model'. Når det har vægt i opgaven, bør det også have vægt i opgaveformuleringen, og man kan vælge at skrive 'vurdér modellen' for at eksplicitere dette krav. Man kan også med fordel undgå ord som *diskutér* og *vurdér*, som andre fag bruger, hvis ikke det giver mening i den konkrete sammenhæng. Der er intet krav om, at en opgaveformulering er bygget op om en fast skabelon på tværs af fagkombinationer. Til gengæld er der krav om, at eleven kan arbejde på højeste taksonomiske niveau, og det kan eksempelvis formuleres som 'giv et bud på', som er konkret og kræver en vurderende tilgang.

Den deduktive side af matematik (*DSB*-matematik[14]) står centralt i faget på A-niveau, og det vil være naturligt, at en opgaveformulering lægger op til denne side af faget. Hvis ikke emnet lægger op til en strengt deduktiv behandling, skal der være mulighed for at eleven på anden vis kan demonstrere sin evne til matematisk ræsonnement f.eks. gennem opstilling af modeller, eksperimentel tilgang med efterfølgende opstilling af konkrete resultater etc. Matematisk tankegangskompetence lægges ligeledes til grund for bedømmelse af opgavebesvarelsen som helhed, både når eleven arbejder konkret inden for faget og anvender faget på en problemstilling uden for faget selv. I samarbejde med naturvidenskabelige fag er matematik ofte redskabsfag til behandling af en empirisk problemstilling, og matematikken er næsten 'uundgåelig', men eleven skal stadig være bevidst om og kunne redegøre for, hvornår og hvordan, der arbejdes *i* matematik, henholdsvis *med* matematik.

Når opgaven stilles, er det et krav, at der skeles til de indgående fags niveau. Der stilles selvsagt ikke samme krav til fag på forskellige niveauer. Det er et krav i læreplanen, at opgaveformuleringen ikke kun stiller krav om stof fra undervisningen på det pågældende niveau. Det bemærkes, at den giver "mulighed for faglig fordybelse, der på væsentlige punkter ligger ud over undervisningen i mindst ét af projektets fag"[15]. Indgår matematik på f.eks. B-niveau, kunne man udvide differentialregning med elementer på højere taksonomisk niveau, fx bevis for monotonisætningen, for at sikre den faglige fordybdelse i nyt stof/indhold.

På de følgende sider præsenteres og kommenteres gode opgaveformuleringer i forskellige kombinationer.

---

[14] *D* = Definition, *S* = Sætning, *B* = Bevis.
[15] (UVM, Studieretningsprojektet stx, 2017), side 12.

MATEMATIK A - OLDTIDSKUNDSKAB C

Hvad vil det sige at føre bevis for noget?

Analysér Platons dialog *Menon* med særligt fokus på den filosofiske argumentationsform og bevisførelse.

Redegør matematisk for konstruktionen af konvekse, regulære polyedre og sætningen om, at der kun findes 5 af disse platoniske legemer. Sammenlign med den matematiske argumentation hos Euklid for samme sætning, og inddrag hans brug af aksiomer, postulater, definitioner og deduktion.

Vurdér i hvilken grad den platonske filosofiske argumentations- og bevisform viser sig i Euklids matematiske bevisførelse. Inddrag et nyere eksempel på matematisk teori samt forskelle og ligheder i argumentationsformen.

KOMMENTAR

I oldtidskundskab stilles krav til tekstanalyse eller kunstanalyse, og det stilles hér i form af en analyse af dialogen *Menon*. Det er også muligt at benytte flere *læsninger* af samme tekst. Den indeholder en samtale om argumentation og bevisførelse og leder naturligt op til den matematiske redegørelse. Her præsenteres matematisk teori efter nutidens standard og sammenlignes med Euklid, og der er meget at komme ind på. Det ønskede bevis er ikke vanskeligt, men skal behandles grundigt, og der stilles andre og store krav til matematik i *bredden* i denne opgave. Man skal absolut kende sit fags kerne og grundlag. Der findes meget materiale indenfor emnet, og man skal sørge for at have ukendte elementer med, så eleven kan vise selvstændighed. En opgave både *i* og *om* matematik, og metode og videnskabsteori spiller en helt central rolle.

MATEMATIK A - INFORMATIK C

RSA-kryptering: Er det sikkert at bruge i fremtiden?

Redegør kort for behovet for kryptering, og redegør matematisk for de overordnede principper i RSA-kryptering og centrale dele af den bagvedliggende matematik, herunder restklasseregning og primtalsteori. Inddrag følgende opgave:

Lad primtallene p=97 og q=31 være givet. Vælg en offentlig nøgle og beregn den hemmelige nøgle. Foretag en kryptering af klarteksten SKOLE, idet der anvendes bogstavnummereringen A=01, B=02 osv. Foretag en dekryptering af den pågældende kryptotekst.

Forklar koden i bilaget ud fra redegørelsen, herunder kontrolstrukturerne. Vurdér RSA-krypteringens sikkerhed i fremtiden i forhold til computernes udvikling, herunder kvantecomputere.

Bilag: Kode, der udfører en RSA-kryptering.

KOMMENTAR

En opgave med et kendt emne, nemlig RSA-kryptering og primtal, som bevæger sig både *i* og *med* matematik. Tidligere er emnet ofte brugt sammen med historie (Enigma-opgaverne). I informatik beskæftiger man sig med it-sikkerhed og kryptering, som er opdrejningspunktet for opgaven, og begge fag er repræsenteret hele vejen igennem. Teorien bag RSA er omfattende og opgaven kræv, at eleven gør sig overvejelser om en passende udvælgelse, der samtidigt kan vise evne til teorifremstilling fra forskellige kilder. I sidste del forklarer elevens opbygning af et stykke kode, som er bilagt. I vurderingen kan man gå flere veje, men det er en mulighed for en dygtig elev at se på *store O-notation* og på, hvor hurtigt forskellige koder kan brydes.

MATEMATIK B - SAMFUNDSFAG A

Giver højere cigaretpriser færre rygere?

Redegør for sociologiske faktorer bag rygestart, herunder forholdet mellem aktør og struktur. Inddrag partiadfærd samt aktuelle data om cigaretpriser og de økonomiske perspektiver i et ændret rygerniveau.

Indfør efterspørgselskurver, og redegør matematisk for differentialkvotient, herunder grænseværdibegrebet og priselasticitet. Præsentér en anvendelse af priselasticitet til prisfastsættelse.

Diskutér virkningen af ændringer i cigaretpriser samt andre relevante tiltag fremsat af 2019-regeringen, der vil give færre unge rygere. Inddrag og vurdér påstande fra bilaget, herunder konsekvenserne af de matematiske antagelser, der har betydning for modelleringen.

Bilag: *https://www.ft.dk/samling/20171/almdel/suu/spm/1201/svar/1522139/1956552.pdf*

KOMMENTAR

Et projekt altovervejende *med* matematik (og lidt *i*). Matematik er på B-niveau og kravet til ræsonnement er tilpasset niveauet. Der kræves en redegørelse for grundlæggende differentialregning samt grænseværdibegrebet på et niveau svarende til A-niveau, så det ligger udover B-niveauet. Formuleringen efterspørger meget anvendelse, og bilaget lægger op til en sammenstilling af samfundsmæssige overvejelser og matematiske antagelser, som eleven kan inddrage i sine metodiske overvejelser om modelleringensprocessen. Desuden vil opgaven naturligt lægge op til at arbejde med forskellige repræsentationsformer. Tværfagligheden ligger altovervejende i behandlingen af bilaget, men også i selve modelleringen.

MATEMATIK C - SPANSK A

Hvad forstår vi ved uendelighed?

Der ønskes en kort præsentation af Jorge Luis Borges og det matematiske indhold i hans forfatterskab.

Indfør kardinalitet, *aleph* og uendelighedsbegrebet i matematik og forklar, hvad man forstår ved Hilberts Hotel. Gør desuden rede for uendelige summer og for, hvornår en geometriske række konvergerer.

Der ønskes en analyse og fortolkning af Jorge Luis Borges' noveller "La biblioteca de Babel" og "El Aleph" og en undersøgelse af, hvordan uendelighedsbegrebet og den 'uendelige eksistens' indgår i fortællingerne.

Endelig ønskes et bud på, hvordan litteraturen og sproglige billeder kan indfange uendelighedsgrebet og gøre det lettere at begribe.

KOMMENTAR

Spansk tænkes som studieretningsfaget hér, og opgaveformuleringens vægt ligger i spansk, men projektet kan også stilles i matematik A med spansk A som andet fremmedsprog. Projektets matematiske niveau (C/B/A) kan let justeres ved at skrue på kravene ifm. redegørelsen. Hér er det holdt på et niveau, hvor en c-elev selv kan forstå og præsentere uendelighed samt vise ræsonnement ifm. redegørelse om geometriske rækker.

Projektet er tænkt som et projekt både *i* og *om* matematik. 'Om' fordi det også omhandler litteraturens 'håndtering' og forsøg på begribelse af uendelighedsbegrebet, og fordi metoden til dels er humanistisk, men 'virker' på et matematisk begreb.

Matematik indgår på et niveau, hvor metode og videnskabsteori fylder lidt, men det er oplagt, at eleven kommer ind på forskellene på humanistisk og matematisk viden. Tværfagligheden er mindre tydeligt, men ligger i, at begrebet uendelighed både har en hverdagsnær/sproglig fortolkning og en matematisk, som sidste del af opgaven netop handler om.

MATEMATIK A - FYSIK A

Anvendelse af komplekse tal i forbindelse med vekselstrøm

Indfør de komplekse tal på rektangulær og polær form samt den komplekse eksponentialfunktion. Gør rede for relevante regneregler for komplekse tal.

Forklar, hvordan en resistor, en kapacitor og en induktor virker i vekselstrømskredsløb, og indfør en kompleks model til beskrivelse af strøm, spænding og impedans.

Benyt den komplekse model til at udlede et udtryk for forstærkningen U_{ud}/U_{ind} som funktion af frekvensen i et RLC-båndpasfilter, hvor udgangsspændingen U_{ud} tages over resistoren.

Konstruér et RLC-båndpasfilter og mål forstærkningen som funktion af frekvens. Gør rede for forsøgsopstilling og målemetode og sammenlign den målte forstærkning med den teoretisk udledte.

KOMMENTAR

Projektet er både *i* og *med* matematik. Der er krav til matematisk teoriopbygning i starten med tanke på relevansen, og senere direkte anvendelse med matematik. Når fysik er det andet fag, er der meget ofte løbende brug af matematik, og således også i denne opgave. Opgaven har tydelige faglige krav. Den følger *ikke* en tredeling, men de taksonomiske niveauer er til stede forskellige steder i formuleringen. Matematisk metode indgår i redegørelsen (teorifremstilling, ræsonnement og bevisførelse) samt løbende i opgaven, hvor der stilles krav til konsistens i begrebsbrug og notation. Opgaven har også et naturligt tværfagligt indhold.

MATEMATIK A - DANSK A (*FORMIDLINGSOPGAVEN*[16])

Formidling af grafteori

Redegør for relevante dele af grafteori, herunder orienterede grafer, turneringer og Hamiltongrafer. Inddrag egne eksempler samt en besvarelse af denne opgave:

OPGAVE: 5 deltagere spiller en turnering alle-mod-alle. Vis, at det er muligt for alle 5 deltagere at vinde og tabe lige mange kampe. Hvis 6 deltagere spiller den samme turnering, skal det vises, at det ikke er muligt at alle 6 deltagere kan dele en førsteplads.

På baggrund heraf udarbejdes en 3-4 siders artikel om indledende grafteori til et populærvidenskabeligt tidsskrift. Opgaven ovenfor skal spille en rolle i artiklen, og artiklen skal også vække læserens interesse for en anden anvendelse af grafteori.

Artiklen suppleres af en meta-del, der vurderer betydningen af sproglige, retoriske og argumentationsteoretiske valg og overvejelser.

KOMMENTAR

Et projekt *i* og *om* matematik. I læreplanen for dansk beskrives den såkaldte **formidlingsopgave**, der består af tre dele: Én del indeholder elevens uddybende faglige redegørelse for problemstillingen eller emnet. Én anden del består af elevens formidlende artikel, som fremlægger problemstillingen for en bestemt målgruppe. Og tredje del udgøres af en såkaldt metatekst, hvor de formidlingsmæssige valg præsenteres. Rækkefølgen af de tre afsnit kan fremgå af opgaveformuleringen eller være op til eleven selv.

Det ses ovenfor, at opgaveformuleringen har denne form. Desuden er der klare krav til matematikken, både til det faglige indhold og i redegørelse. Der ligger selvstændighed i at udvælge *relevante* dele af emnet, og der ligger selvstændighed i artiklen. Det er vigtigt, at eleven er klar over, at redegørelsen og artiklen er målrettet to vidt forskellige målgrupper, og formidlingen derfor er forskellig. Således kan eleven i meta-delen komme ind på fagets metode og sproglige særegenhed (notation, symbolsprog, definitioner osv), og herved vise metode og basal videnskabsteori. Tværfagligheden ses primært i artiklen og sekundært i meta-delen.

[16] Formidlingsopgaven er beskrevet i læreplan for dansk stx (UVM, Vejledning til læreplan i dansk stx, 2017). Det er i skrivende stund ikke muligt at skrive med faget engelsk.

MATEMATIK A - KOMPLEKSE TAL

Hvad gør de komplekse tal særlige som talområde?

Indfør de komplekse tal som talområde og i en historisk ramme, og indfør de elementære regneoperationer for komplekse tal. Sammenhængen mellem komplekse tal og algebraens fundamentalsætning ønskes illustreret.

Redegør for holomorfe funktioner, kompleks differentiabilitet og Cauchy-Riemanns ligninger.

Bevis Euler's identitet, og forklar den geometriske betydning. Vurdér, hvorfor identiteten siges at være et eksempel på *smuk* matematik. Giv et bud på, hvordan matematisk skønhed ellers kan tage sig ud.

KOMMENTAR

En enkeltfaglig opgave *i* (og lidt *om*) matematik. Indenfor emnet komplekse tal/kompleks funktionsteori er der også problemstillinger, der lægger op til behandling i to fag, eksempelvis anvendelse af komplekse tal i fysik, men hér spørges til de komplekse tals struktur, som bedst besvares i matematik.

Opgaven bygger dels på kendskab til infinitesimalregning, partiel differentiation, trigonometriske funktioner og matematikhistorie (lidt), men ligger i øvrigt udover A-niveauets indhold. Ræsonnement bruges løbende, og der er bevisførelse omkring Cauchy-Riemanns ligninger samt Eulers identitet. Der er mange kilder at trække på, og eleven har til opgave at ensarte notationen i projektet. Til sidst ønskes en mere krævende tanke om, hvad matematisk skønhed er. Enkelhed, streng argumentation, symmetri…? Eleven kan inddrage matematikeres tanker om dette. I konklusionen forventes det, at eleven besvarer det overordnede spørgsmål.

Der er også krav om tværfaglige overvejelser (til mundtlig prøve) til et enkeltfagligt projekt, og denne opgave lægger op til, at eleven kan anskue matematiske objekter i et æstetisk lys. Eleven kan således drage en overordnet parallel til andre fags opfattelser af skønhed.

MATEMATIK A - SIR-MODELLEN

Hvordan undgår man, at en mæslingeepidemi bryder ud?[17]

Redegør for teorien bag koblede differentialligninger, og vis eksempler på numerisk løsning af differentialligninger.

Indfør SIR-modellen som differentialligningsmodel, og opstil en model for et hypotetisk mæslinge-udbrud. Inddrag applet'en https://shiny.sund.ku.dk/cld189/. Opbyg desuden en matematisk simulering af udbruddet, og undersøg muligheden for at begrænse epidemier gennem vacciner.

Vurdér betydningen af de bagvedliggende antagelser for modellens anvendelighed. Foreslå en mulig udvidelse af modellen, og beskriv de matematiske forskelle mellem modellerne.

KOMMENTAR

En opgave *i* og *med* matematik. Emnet er kendt og kan bruges i samspil med f.eks. historie eller biologi, men dette er et eksempel på en problemstilling, der er udformet, så den *kan* lægge op til en enkeltfaglig behandling. Fokus er i høj grad er på modellers opbygning og anvendelighed, og der kræves et større matematisk overblik.
De matematiske metoder er i spil hele vejen igennem. F.eks. er der eksperimentel *simulering* i brug. Sværhedsgraden af emnet er passende til 3g, men med matematik alene forventes en større grad af faglig fordybelse, og den ligger blandt andet i kravet til flere metoder og til vurderingen samt udvidelsen af modellen. Der er flere mulige udvidelser af modellen, som fører til udmærkede matematiske overvejelser.

Et ukendt materiale kunne f.eks. være et egentligt datasæt, bare ikke for omfattende.

[17] Med inspiration fra (Ekstrøm, 2019).

TJEKLISTE

Tjeklisten herunder er tænkt som en måde, hvorpå man kan sikre, at en opgaveformulering opfylder og dækker de krav, der er behandlet i den foregående del af håndbogen.

Når opgaveformuleringen foreligger i en tæt på færdig udgave, kan man gå punktvis gennem listen.

1. Har opgaveformuleringen en **problemstilling** eller **overspørgsmål**?
2. Er matematik **tilstrækkeligt repræsenteret**? (Gerne i flere af opgavens dele)
3. Svarer matematikken i opgaven til elevens **højeste niveau**? (Afsluttet eller igangværende)
4. Der er krav til **faglig fordybelse**, der ligger ud over undervisningen i mindst ét fag. Hvis dette fag er matematik, er denne **fordybelse** så til stede og overkommelig?
5. Er der mulighed for, at eleven kan arbejde med faget med forskellige **metoder**? (I/med/om)
6. Er der et **ukendt element** for eleven, eventuelt et bilag? (Bilag må ikke være på fremmedsprog)
7. Er den tilpas **konkret** til, at både elev og bedømmere ved, hvornår de enkelte dele er besvaret?
8. Er den tilpas åben til, at eleven har mulighed for at vise **selvstændighed**?
9. Er det klart for eleven, hvor eller hvordan der er mulighed for at tænke **metode** og **basal videnskabsteori** ind? (Det behøver ikke være direkte nævnt i opgaveformuleringen)
10. Er der et **innovativt element** i opgaven? (Hvis ja, bør det fremgå tydeligt af opgaveformuleringen, så der ikke er tvivl om, hvor og hvordan det skal indgå)
11. Er der brugt ord, der måske er **ukendte** for eleven eller ikke har været brugt som en del af vejledningen? De kan med fordel skiftes ud.
12. Er ordet **redegør/redegørelse** brugt i flere betydninger? Det bør sikres, at eleven er bekendt med forskellene mellem fagene.

Til sidst: Ved eleven, hvordan man **optæller sider med symbolsprog**? Nævn det hellere en ekstra gang.

God fornøjelse.

LITTERATURLISTE

Back, Djurhuus, Dreyer, & Schoppe. (2019). *Sådan skriver du SRP*. København: Forlaget Columbus.

Damm-Jakobsen, H. (2015). *God stil i srp-formuleringer i matematik.* Hentet fra Matematiklærerforeningen: http://www.lmfk.dk/pics/636.pdf

Ekstrøm, C. T. (Februar 2019). *Sandsynligvis.dk*. Hentet fra Sandsynligvis: https://sandsynligvis.dk/2019/02/20/hvad-kr%C3%A6ves-der-for-at-undg%C3%A5-en-m%C3%A6slingeepidemi/

Larsen, J., & Jensen, K. (2019). *Metoder og Videnskabsteori i, med og om matematik.* Hentet fra EMUen (Undervisningsministeriet): https://emu.dk/stx/matematik/laereplan-og-vejledning/metoder-og-videnskabsteori

UVM. (August 2017). *Studieretningsprojektet stx*. Hentet fra UVM: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-laereplaner-2017/stx/studieretningsprojektet-stx-

UVM. (2017). *Vejledning til læreplan i dansk stx*. Hentet fra UVM: https://www.uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/fag-og-laereplaner/laereplaner-2017/stx-laereplaner-2017

UVM. (Marts 2019). *Vejledning srp*. Hentet fra UVM: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-laereplaner-2017/stx/studieretningsprojektet-stx-