UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Diskret matematik på htx

Fra rekursive følger til differentialligninger

Inspirationsmateriale til forløb i matematik A på htx med fokus på at få integreret de nye områder i matematiklæreplanen. Her introduceres eleverne for diskret vækst gennem arbejdet med at opstille og tolke fremskrivningsmodeller og vækstmodeller. Vækst opfattes i denne sammenhæng som et diskretiseret fænomen, hvor tiden er diskret. Vækstmodellerne kan endvidere ses som en indgang til differentialligningsbegrebet, og forløbet fører naturligt over i et undervisningsforløb om dette emne.

Diskret matematik på htx

Fra rekursive følger til differentialligninger

I dette materiale beskrives et undervisningsforløb om emnet diskret matematik, hvor fokus ligger på elevernes selvstændige arbejde fremfor en mere traditionel præsentation af stoffet med eksempler og opgaveregning. Dette gør undervisningsforløbet mere krævende for både elever og lærer, men forhåbentlig også langt mere givende!

Indholdsfortegnelse

Undervisningsmaterialet

Det overordnede mål for forløbet

Med de nye læreplaner fra 2017 er emnet *Diskret matematik* blevet en del af kernestoffet. Nærværende undervisningsmateriale udfolder hvorledes emnet kan behandles enten selvstændigt eller som introduktion til arbejdet med differentialligninger, og hvor rekursive følger benyttes til at beskrive diskrete vækstmodeller. Fra undervisningen begrænser elevernes viden om vækst sig sædvanligvis til kontinuert vækst og ofte kun lineær, eksponentiel og potensvækst. Ved at arbejde med opstilling og fortolkning af fremskrivnings- og vækstmodeller, hvor vækst opfattes som et diskretiseret fænomen, og hvor tiden er diskret opnår eleverne en større forståelse af vækstbegrebet. Vækstmodellerne kan opfattes som en indgang til differentialligningsbegrebet, hvorfor forløbet naturligt kan efterfølges af et forløb i dette emne.
I det her beskrevne materiale læner vækstmodellerne sig op ad arbejdet med vækst i bioteknologi, fx vækst af colibakterier, men i andre studieretninger kan denne vinkel ændres efter ønske.

Mål for eleverne

Efter forløbet forventes det, at eleverne kan:

- opstille rekursive beskrivelser af vækst
- generalisere deres undersøgelser af vækst og opstille modeller for væksten
- modellere vækstsituationer med computer
- kende forskel på lineær, eksponentiel og logistisk vækst i både matematik og bioteknologi/biologi
- aktivt modellere fremskrivningsmodeller

Der er særlig fokus på følgende fire kompetencer:

- Modelleringskompetencen
  Eleverne skal kunne analysere problemstillinger om vækst og opstille og løse tilhørende matematiske modeller. De skal kunne tolke løsningen og bl.a. gøre rede for modellens eventuelle begrænsninger og validitet.
- Repræsentationskompetencen
  Eleverne skal kunne veksle mellem forskellige repræsentationer herunder grafiske, symbolske og sproglige repræsentationer.
- Hjælpemiddelkompetencen
  Eleverne skal kunne anvende matematiske hjælpemidler, herunder matematikprogrammet GeoGebra og konkrete materialer som fx tændstikker, M&M-chokolader og bønner til visualiseringer og undersøgelser.
- Kommunikationskompetencen
  Eleverne skal kunne formulere sig i og skifte mellem det matematiske symbolsprog og det daglige skrevne eller talte sprog.

Undervisningen

De enkelte moduler kan naturligvis afholdes på mange måder. I den her beskrevne undervisning anvendes elementer fra undervisningsformen "Undersøgelsesbaseret matematikundervisning", bl.a. brugen af logbog. Eleverne skriver gruppevis logbog fra gang til gang med udgangspunkt i nogle spørgsmål, som læreren har formuleret. Dette er for at fastholde og synliggøre elevernes tanker om det, de arbejder med, så disse systematisk kan anvendes som input til undervisningen. Læreren har adgang til logbøgerne, dels for at kunne udvælge interessante passager, der kan bruges i undervisningen, og dels for at kunne følge med i den forståelse af emnet, som eleverne får opbygget undervejs. Hvert modul begynder med en klassediskussion med udgangspunkt i udvalgte klip fra elevernes logbøger, der projiceres op på tavlen. Efter at klassen er kommet til en fælles forståelse af de områder læreren har valgt at fokusere på, (forslag er angivet her i materialet), introduceres dagens emne og eleverne får mulighed for at arbejde med det i grupper på ca. 4 personer. Materialet her indeholder forslag til opgaver og andre materialer, som kan findes i bilag. Der kan samles op undervejs efter behov, og modulet afsluttes med en kort fælles opsamling, hvor logbogsspørgsmålene til næste modul præsenteres, og eleverne eventuelt får mulighed for at begynde deres logbogsskrivning. Det er vigtigt, at der angives en deadline for indlæg, som gør det muligt for læreren at planlægge næste moduls indledende klassediskussion. Undervisningen er beskrevet i moduler af ca. 90-100 min. varighed.

Forløbsbeskrivelse

1. modul: Opbygge forståelse for rekursioner og den relevante terminologi

Gennem undersøgelser vil eleverne opbygge en forståelse for, hvordan udviklinger kan beskrives vha. rekursionsformler. Eleverne skal tilegne sig den terminologi, der er relevant, når man beskriver udviklinger rekursivt. Det er en vigtig pointe, at det *ikke* drejer sig om at finde en funktionsforskrift, der kan beskrive hele udviklingen, men at det er den *trinvise vækst*, der fokuseres på.

Eleverne skal i dette modul arbejde med nedenstående arbejdskort, der findes i bilag:

- Tændstikker 1
- Tændstikker 2
- Kvadrater
- LEGO©
- Prikker

Hertil skal der benyttes konkrete materialer i form af tændstikker og legoklodser.

2. modul: I dybden med notationen for rekursion

I matematisk litteratur er rekursive følger ofte beskrevet udelukkende vha. symbolsk notation. Da denne erfaringsmæssigt volder mange elever besvær, er det nødvendigt at bruge tid på at indføre og fortolke notationen. En måde at stilladsere dette arbejdet på er ved at lade eleverne forklare betydningen af de symboler (tal og bogstaver), der forekommer i konkrete følger. Her kan eleverne arbejde med to eller flere af følgende arbejdskort (findes i bilag):

- Talfølge 1
- Talfølge 2
- Fibonacci
- Kvadratrødder
- Vampyrer

3. modul: Modellering ved hjælp af rekursive beskrivelser

Efter at have tilegnet sig den nødvendige notation og arbejdet med givne rekursive følger, er næste skridt at give eleverne mulighed for selv at opstille rekursive følger, der modellerer en konkret situation. Herigennem oplever de, hvilket kraftfuldt værktøj sådanne følger er. Mulige aktiviteter, der kan findes i bilag, er:

- M&M-laboratoriet
- Smitte

Elevernes resultater fra disse aktiviteter benyttes flere gange senere i forkøbet.

Udførelsen af ovenstående aktiviteter kræver anskaffelse af hvide og brune bønner samt "flade" M&M'er. Det kan anbefales at man som lærer selv afprøver aktiviteterne på forhånd, for at få en fornemmelse for mængden af de nødvendige materialer og det tidsmæssige forbrug.

4. modul: Mere modellering med rekursioner - herunder logistisk vækst

Indholdet i dette og det følgende modul er særlig relevant for samarbejdet med bioteknologi eller biologi. Det her beskrevne indhold kan eventuelt tilpasses studieretningerne med andre fag efter behov.

I forlængelse af arbejdet med eksponentiel vækst fra forrige modul bliver eleverne nu introduceret for logistisk vækst gennem aktiviteten:

- Vækstspil

Spilleplade, regler og brikker findes i bilag og printes ud på forhånd. Spillepladen skal udskrives på A3-papir. Endvidere skal der indkøbes "mad" til bakterierne fx M&M, Smarties eller Click mix.

Hensigten med spillet er, at give eleverne en intuitiv forståelse af hvordan logistisk vækst udvikler sig, og hvorfor det sker på netop denne måde. I biotek-studieretninger har eleverne set data fra logistisk vækst før, men forståelse bliver en anden, når denne vækstform kan følges trinvist.

5. modul: Modellen for logistisk vækst

I dette modul fortsættes arbejdet med logistisk vækst. Modulet har to formål: dels at diskutere hvordan fremskrivningsmodeller også kan beskrive faldende vækst (mens det samlede antal stadig vokser!) og dels at introducere brugen af it, her GeoGebra, som et redskab til at modellere diskret vækst.

Man kan på forhånd have produceret en video (fx i Screencast-O-Matic), der viser programmets faciliteter, som eleverne skal have set inden modulet. Et eksempel på en sådan video findes i bilag.

Alternativt kan man introducere brugen af et program på klassen.

I forbindelse med den indledende klassediskussion kan følgende dokument benyttes (findes i bilag):

- Opsamlingsark.

6. modul: Differentialligninger - hvad er det?

Som afslutning på forløbet kan man koble den diskrete vækst til kontinuert vækst og differentialligninger. Et første skridt er at fokusere på linjeelementer, der jo netop bestemmes i enkelte punkter. Den "bedste" kurve gennem de diskrete værdier fra fremskrivningsmodellerne indtegnes sammen linjeelementer, og man ser på hvordan linjeelementerne ændrer hældning, når man ændrer på parametrene i fremskrivningsmodellen. Herfra er vejen til en introduktion af differentialligninger kort, og den kan gøres mere eller mindre formel afhængig af, hvordan man som lærer ønsker at arbejde med differentialligninger.

Til dette modul skal man have forberedt et GeoGebra-fil med skydere, data og fremskrivningsmodel for M&M-laboratoriet eller vækstspillet med logistisk vækst, hvor der sammen med de diskrete modeller er indtegne linjeelementer samt den "bedste" kurve gennem punkterne. Endvidere arbejder eleverne med opgaver, der kan findes i bilag:

- Linjeelementopgaver.

Yderligere idéer:

Forløbet kan herefter eventuelt fortsættes ved at arbejde videre med differentialligninger. Her kan man se på:

- Linjeelementer og tangenter i forbindelse med differentialligninger
- Sproglige repræsentationer af differentialligninger herunder benyttelse af begreberne: *proportionalitet, ligefrem proportionalitet* og *omvendt proportionalitet*. I arbejdet med sproglige formuleringer kan henvises til tidligere eksamensopgaver på stx.
- Løsning af differentialligninger vha. linjeelementer, eftervisning af løsning, løsning af simple differentialligniner ved integration og gættemetoden.

Det er også en god idé at orientere sig i det tidligere forberedelsesmateriale til matematik fra 2016, der omhandler rekursive følger, og hvor man ser på disses anvendelse i Newtons metode og Eulers metode.

Forløbsmetro

1. modul: Opbygge forståelse for rekursioner og den relevante terminologi

Efter en kort introduktion til emnet diskret vækst (men *ikke* rekursive følger!) starter alle elever med opgavearket "Tændstikker 1", og går derefter videre til et eller flere af de øvrige fire arbejdskort ud fra den sværhedsgrad læreren mener, de enkelte grupper kan håndtere.

Når alle grupper er igennem ”Tændstikker 1”, laves en fælles opsamling, der omhandler:

- Diskussion af *vækst* i modsætning til *tilvækst*
- Elevernes udsagn om hvordan de opfatter væksten og tilvæksten i mønstret
- Opskrivning af rekursive sammenhæng. Notationen $F(t+1)=F(t)+...$ introduceres og fortolkes i forhold til elevernes udsagn. I det videre arbejde lægger læreren vægt på, at eleverne arbejder med den rekursive måde at skrive mønstrenes udvikling på.

Der lægges kun *meget lidt* vægt på at bestemme funktionsudtryk for udviklingerne - det er (til)væksten, beskrevet rekursivt, der skal fokuseres på. I det følgende vil vi udelukkende benytte ordet *vækst*, men det er stadig vigtigt at kunne skelne mellem den ”samlede vækst” og ”tilvæksten i de enkelte trin”.

Som hjemmearbejde laver eleverne gruppevis en logbog (i fx Google Doc, som læreren har adgang til at læse som led i forberedelsen til næste modul).

Spørgsmål til hjemmearbejde

- Forklar hvad I forstår ved vækst i forbindelse med de mønstre, I har arbejdet med.
- Vælg en af de serier med mønstre I arbejde med, og gør rede for hvordan mønstrene voksede. Benyt både tegninger og symboler til at beskrive væksten.
- Forklar hvordan man helt generelt kan opskrive formler for vækst, der fremkommer på denne måde.

2. modul: I dybden med notationen for rekursion

Undervisningen starter med en grundig opsamling på elevernes udsagn fra logbøgerne. Læreren præsenterer eksempler på det, eleverne har skrevet om logbogs-spørgsmålene.
Diskussion med eleverne om måderne at formulere svar på, hvordan de er ens; hvordan de er forskellige etc. Det vil være en fordel hvis man kan klippe udsagn sammen, og få eleverne til at forholde sig til:

- graden af præcision
- hvorvidt udtrykkene fortæller det samme
- forskellige måder at skrive rekursioner på $F(n+1)=F(n)+...,\ F(n)=F(n-1)+...$

Herefter skal eleverne arbejde med deres forståelse af rekursive opskrivninger gennem modulets fem arbejdskort. Alle grupper bør arbejde med "Talfølge 1" og "Talfølge 2". De tre øvrige aktiviteter kan benyttes til at udfordre de elever, der ”kan det hele i forvejen”, og de falder lidt uden for det helt centrale fokus med at kunne beskrive vækst rekursivt. Disse aktiviteter hentes frem igen og benyttes senere i undervisningsforløbet til elever, der mangler udfordringer. Flere opgaver kan findes på nettet.

Når alle har arbejdet med det første arbejdskort, laves en opsamling, hvor elevernes tanker om det, de har arbejdet med, synliggøres. Betydningen af de forskellige elementer i rekursionen $F(0)=2;\ F(t+1)=F(t)+3$ og de andre rekursioner på arbejdsarket skal behandles grundigt. Især kan man med fordel forberede tankegangen om linjeelementer og differentialligninger, ved at se på rekursionen $F(t+1)=F(t)+3$ som en angivelse af væksten overalt; ”uendelig mange linjer med hældning 3”, og at F(0) = 2 fastlægger hvilken af de uendelig mange muligheder, der er tale om.

Spørgsmål til hjemmearbejde

- Gør rede for jeres vigtigste opdagelser på arbejdskortene "Rekursivt definerede talfølger 1" og "Rekursivt definerede talfølger 2".
- Beskriv med jeres egne ord hvilke typer af vækst, der er tale om – og hvorfor.
- Forklar hvordan dette hænger sammen med matematik, I kender fra tidligere.

3. modul: Modellering ved hjælp af rekursive beskrivelser

Undervisningen starter atter med opsamling på elevernes logbøger ud fra udvalgte eksempler. Ved opsamlingen er der fokus på:

- elevernes beskrivelser ved hjælp af rekursion
- at se væksten i beskrivelserne $F(n+1) = F(n) + ...$
- vigtigheden af at kende en begyndelsesværdi
- at eleverne kan tilskrive de rekursive udtryk mening.

Herefter arbejder eleverne med to konkrete aktiviteter, M&M-laboratoriet og Smitte, der giver anledning til eksponentiel vækst.

Når aktiviteterne er udført, afsluttes modulet med en klassesamtale, der har fokus på:

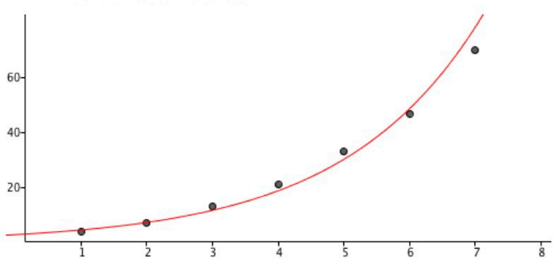
- Teoretisk forståelse af "den ideale" udvikling af data i aktiviteterne. For M&M er tilvæksten $\frac{1}{2} \cdot$antallet. For bønnerne er der en vækst på ca. $6 \cdot$antallet
- Fortolkninger af hvad det er i aktiviteterne, som giver anledning til at væksten bliver tilnærmelsesvis eksponentiel.

Eleverne kan formentlig opstille en rekursiv model, der teoretisk beskriver data. For M&M-laboratoriet er det $M(t+1) = M(t) + 0{,}5 \cdot M(t)$. Med bønnerne er det vanskeligere!

Spørgsmål til hjemmearbejde

- Beskriv med jeres egne ord hvilken type af vækst, der fremkommer ved de to eksperimenter, og hvad der er det særlige ved denne form for vækst.
- Gør rede for hvorfor eksperimenterne giver anledning til denne type vækst. Hvad er det ved udførelsen af eksperimenterne, der har betydning?

Resultater fra M&M's forsøg



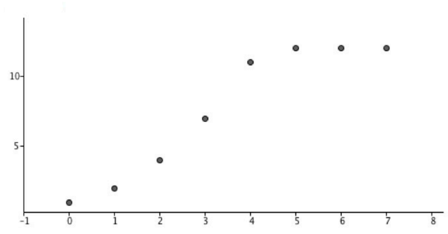
$T(n+1) = \frac{T(n)}{2} + T(n)$

4. modul: Mere modellering med rekursioner - herunder logistisk vækst

Lektionen starter med opsamling og diskussion af udsagn fra elevernes logbøger. Der er fokus på:

- forskellen på fremskrivningsfaktor og vækstfaktor for eksponentiel vækst
- præcisionen i det der er skrevet, og på hvordan den teoretiske forståelse af spillene kan udtrykkes som rekursioner. Atter skal betydningen af en startværdi pointeres
- den teoretiske forståelse af de to spil, og hvorfor de bør give anledning til eksponentiel vækst: der er 50% sandsynlighed for at *m* vender opad på M&M's, og ca. 6 bønner kan støde op til en hvid bønne og dermed blive smittet.

Resultater fra vækstspil



Herefter spiller eleverne Vækstspillet og derefter afsluttes modulet med en klassesamtale, hvor der fokuseres på elevernes observationer og fortolkninger samt deres ideer til beskrivelse af en sådan udvikling.

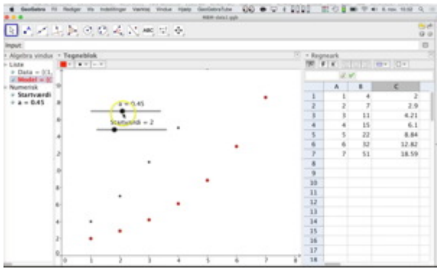
Som hjemmeopgaver besvarer eleverne nedenstående spørgsmål i logbogen:

Spørgsmål til hjemmearbejde

- Beskriv jeres observationer fra Vækstspillet
- Forklar hvorfor antallet af brikker udvikler sig som I har observeret.

5. modul: Modellen for logistisk vækst

Som forberedelse derhjemme har eleverne eventuelt fået til opgave se en video om modelsimulering og brug af skydere i GeoGebra.



Opsamlingen skal denne gang skal have fokus på:

- Hvorfor er det ikke længere bare en eksponentiel vækst
- Hvordan kan man i en rekursiv beskrivelse (en fremskrivningsmodel) tage højde for den faldende vækst.

og den kan eventuelt foregå lidt anderledes end den sædvanlige klassediskussion, nemlig ved at eleverne som indledning får udleveret opsamlingsarket, som de arbejder med i ca. 25 min.

I den efterfølgende klassesamtale præsenteres elevernes forskellige ideer, og de anskues som fremskrivningsmodeller for at undersøge, om de beskriver den type udvikling, der blev observeret i vækstspillet. Denne fase skal der bruges god tid på, så eleverne virkelig når at begribe, hvordan man matematisk kan styre, at væksten bliver aftagende.

Herefter præsenteres standardmodellen for logistisk vækst (som fremskrivning):

$$N(t+1) = a \cdot \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t) + N(t)$$

Modellen skal diskuteres og fortolkes, så eleverne erfarer, hvorfor den også beskriver faldende vækst. Standardmodellen sammenlignes med elevernes ideer.

Efterfølgende skal eleverne arbejde med deres data fra M&M spillet (eksponentiel) og meget gerne autentiske data fra bioteknologi (logistisk, e-coli bakterievækst). Her laver de fremskrivningsmodeller i GeoGebras regneark af eksponentiel og logistisk vækst og tegner dem sammen med data fra de tilsvarende eksperimenter. Ved hjælp af skyderne findes den bedst mulige model.

Spørgsmål til hjemmearbejde

- Gør rede for hvordan man modificerer en eksponentiel vækst, så den kan beskrive logistisk vækst som jeres biotekforsøg er et eksempel på.

6. modul: Differentialligninger - hvad er det?

Der startes med en opsamling af indholdet i elevernes logbøger. Atter er der fokus på vækst, og på hvordan man ”modificerer” eksponentiel vækst til logistisk vækst med udgangspunkt i elevernes formuleringer fra logbøgerne. Endvidere lægges vægt på standardmodellen for logistisk vækst som fremskrivningsmodel:

$$N(t+1) = a \cdot \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t) + N(t)$$

og på, at (til)væksten således kan udtrykkes som

$$N(t+1) - N(t) = a \cdot \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t).$$

Efter opsamlingen kommer det store mentale spring til differentialligninger, dog uden eleverne får at vide, at ”nu handler det om emnet differentialligninger”. Introduktionen foregår ved, at læreren præsenterer eleverne for de velkendte GeoGebra-filer med skydere, data og fremskrivningsmodel for M&M og. e-coli vækst. Men hvor der nu er indtegnet linjeelementer samt ”den bedste kurve” gennem punkterne. Lige inden læreren ændrer værdierne af skyderne får eleverne følgende besked:

Vær klar til at skrive jeres tanker ned, om det I får at se... Men ***lad være med at kommentere det****.*
Først skal I diskutere gruppevis, og så samler vi op fælles.

- *Hvad ser man på figurerne?*
- *Hvordan ændrer de sig, når man rykker på skyderne*
- *Hvordan ændrer de små linjestykker sig?*
- *Hvilken betydning har de små linjestykker?*

Efter elevernes gruppesamtaler startes en klassediskussion om, hvad det er, linjestykkerne viser. Her kommer man formodentlig ind på følgende:

- Vækst - tangenter eller gennemsnitlig vækst
- Er ændringen kun afhængig af værdier på 2.-aksen?
- Betydning af startværdi.

På baggrund af denne diskussion laver eleverne linjeelement-opgaver, hvor de skal prøve at indtegne kurver på et ark, hvor kun linjeelementerne er vist, for at kvalificere fornemmelsen af ”linjeelement = tangent” yderligere.

Når eleverne har tegnet et par kurver, gennemføres en klassediskussion, hvor sammenhængen mellem linjeelement og tangenthældning præciseres. Dette leder frem til, at en kurve kan være givet ved den vækst som linjeelementerne viser. Det er vigtigt, at man som lærer sørger for, at der er en tydelig kobling tilbage til elevernes forforståelse af, at tangenthældninger også har noget med *den afledede funktion* at gøre. Heraf kan man sammen med eleverne udlede at

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)$$

også kan skrives som

$$N'(t) = a \cdot \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)\,.$$

Intuitivt defineres en differentialligning, som noget, der angiver vækst (visualiseret ved linjeelementer) i *alle* relevante punkter i koordinatsystemet og ikke bare i et antal diskrete punkter, som der hidtil er arbejdet med.

Forløbet kan herefter afsluttes med en diskussion af

- Ligheder og forskelle mellem de måder man kan beskrive vækst på, altså rekursive følger og differentialligninger.