Opgavesamling Matematik A HTX

Denne opgavesamling viser eksempler på opgaver, der kan stilles ved den skriftlige prøve i Matematik A på HTX efter reformen 2017 inden for de nye elementer. Dette involverer bl.a. opgaver i overslagsregning, dataanalyse, diskret matematik samt et bredt udsnit af opgaver i delprøven uden hjælpemidler. Opgavesamlingen er ikke en udtømmende liste over opgaver, der kan forekomme og ej heller et udtryk for vægtningen mellem emner i kommende eksamenssæt. Opgaverne kan frit benyttes i den daglige undervisning.

Delprøven uden hjælpemidler

Opgave 1.1

Foto: Colourbox

Til et stort arrangement forventes det, at 20000 personer hver drikker tre kopper kaffe.

Arrangørerne skal derfor indkøbe et antal kg kaffepulver.

De ved at der skal bruges 6-7 gram kaffepulver pr. kop.

Arrangørerne foretager en beregning og påstår, at de skal købe 2000 kg kaffepulver.

a) Foretag en overslagsberegning, der viser om arrangørernes beregning er rimelig.

Opgave 1.2

Et cirkeludsnit med radius 10 har vinklen $93°$.

a) Giv et overslag på arealet af cirkeludsnittet, angivet som et helt tal.

Opgave 1.3

Billedet viser en swimmingpool.

Figuren nedenfor viser et tværsnit af poolen set fra langsiden med nogle mål påført.

Poolens bredde er 4,5 m.

Personalet påstår at rumfanget af poolen er $89\,m^3$.

a) Benyt overslagsregning til at vurdere om personalets påstand kan være korrekt.

Opgave 1.4

Sammenhængen mellem farten v og størrelsen af luftmodstanden F for en faldskærm kan i en model bestemmes ved formlen

$$F = 0,72 \cdot A \cdot v^2$$

hvor A er tværsnitsarealet af den åbne faldskærm. Der ses bort fra enheder.

a) Giv et overslag over størrelsen af luftmodstanden F, når $A = 24$ og $v = 6$.

Opgave 1.5

Andelen af 30-49 årige amerikanere, som brugte sociale medier i perioden 2010-2014, er angivet i tabellen.

År efter 2010	0	1	2	3	4
Andel i %	52,1	59,2	64,9	72,1	76,8

Det oplyses, at andelen kan bestemmes som en lineær udvikling på formen

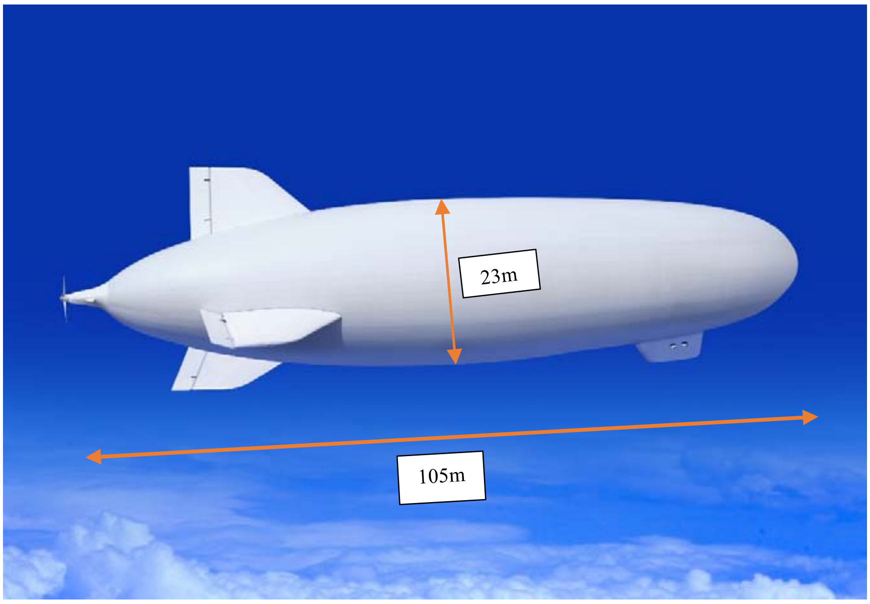
$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x er antal år efter 2010, og f er andel 30-49 årige amerikanere i procent.

a) Benyt overslagsregning til at give et bud på værdien af tallene a og b samt et bud på hvornår 100% af persongruppen forventes at benytte sociale medier.

Opgave 1.6

Billedet viser en zeppeliner. Nogle få mål fremgår af figuren.



a) Benyt overslagsregning og passende antagelser om formen af zeppelineren til at vurdere dens rumfang.

Opgave 1.7

a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = |x-2|-1$.

b) Løs ligningen $|x-2|-1 = \frac{1}{3}x+1$.

Opgave 1.8

a) Løs ligningen $x+1 = \sqrt{x+3}$.

Opgave 1.9

a) Løs ligningen $x^2 - 8x = 20$.

Opgave 1.10

a) Vis, at $x = -\frac{\ln(8)}{4}$ er løsning til ligningen $2 + 8 \cdot e^{4 \cdot x} = 3$.

Opgave 1.11

En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 1 = 0$$

a) Gør rede for, at punktet $Q(3;-2)$ ligger på cirklen.

Opgave 1.12

Linjen *l* har ligningen

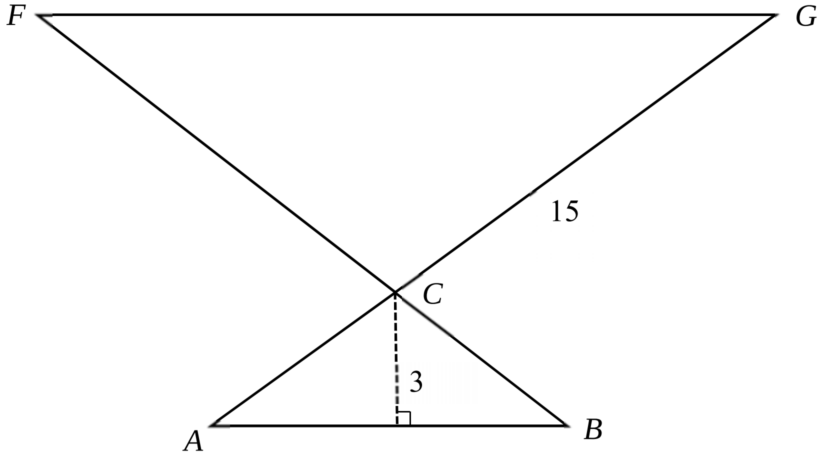
$$l: \quad y = -\tfrac{1}{4}x + 2$$

a) Bestem ligningen for den linje *m*, der står vinkelret på *l*, og som skærer *y*-aksen i samme punkt som *l*.

Opgave 1.13

a) Bestem ligningen for den rette linje, der har en vinkel på 60 grader med vandret, og som går gennem punktet $(1\,;\sqrt{3})$.

Opgave 1.14



Figuren viser to ensvinklede og ligebenede trekanter, *ABC* og *CFG*. Det oplyses, at arealet af trekant *ABC* er 12, at højden fra *C* på siden *AB* er 3 samt at $|GC| = 15$. Figuren er ikke målfast.

a) Bestem siderne i trekanterne *ABC* og *CFG*, og vis at arealet af trekant *CFG* er 108.

Opgave 1.15

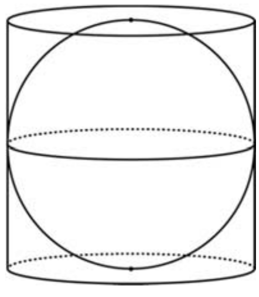
En trekant med sidelængderne $a = 5$, $b = 6$ og $c = 5$ har arealet 12.

a) Bestem radius i den omskrevne cirkel.

b) Skitsér trekanten med den omskrevne cirkel.

Opgave 1.16

En cylinder omslutter akkurat en kugle. Se figuren.



a) Hvor stor en del af cylinderens volumen optages af kuglen? Begrund dit svar.

Opgave 1.17

En vektor $\vec{a}$ er givet ved de polære koordinater $\vec{a} = (10; 30°)$.

a) Forklar hvad tallene 10 og $30°$ fortæller om $\vec{a}$ og skitsér en repræsentant for $\vec{a}$.

b) Giv et overslag over de kartesiske koordinater for $\vec{a}$ som heltal.

Opgave 1.18

a) Hvilke af følgende vektorer står vinkelret på hinanden?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Opgave 1.19

a) Tegn en repræsentant for en vektor, der opfylder følgende:

- Vektorrepræsentanten har begyndelsespunkt i $(1,2)$
- Vektorrepræsentanten har en længde på 5
- Vektorrepræsentanten er ortogonal med vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.20

a) Tegn grafen for en funktion *f*, der opfylder følgende:

- Grafen for f har netop 2 vandrette tangenter
- $\mathrm{Vm}(f) =]-2;6]$
- $f(1) = 3$.

Opgave 1.21

a) Tegn grafen for en funktion *f*, der opfylder:

- $\mathrm{Dm}(f) = [-1;9]$
- $\mathrm{Vm}(f) = [-5;5]$
- *f* er voksende i intervallerne $[-1;1]$ og $[6;9]$
- *f* har globalt maksimum i punktet $(1;5)$.

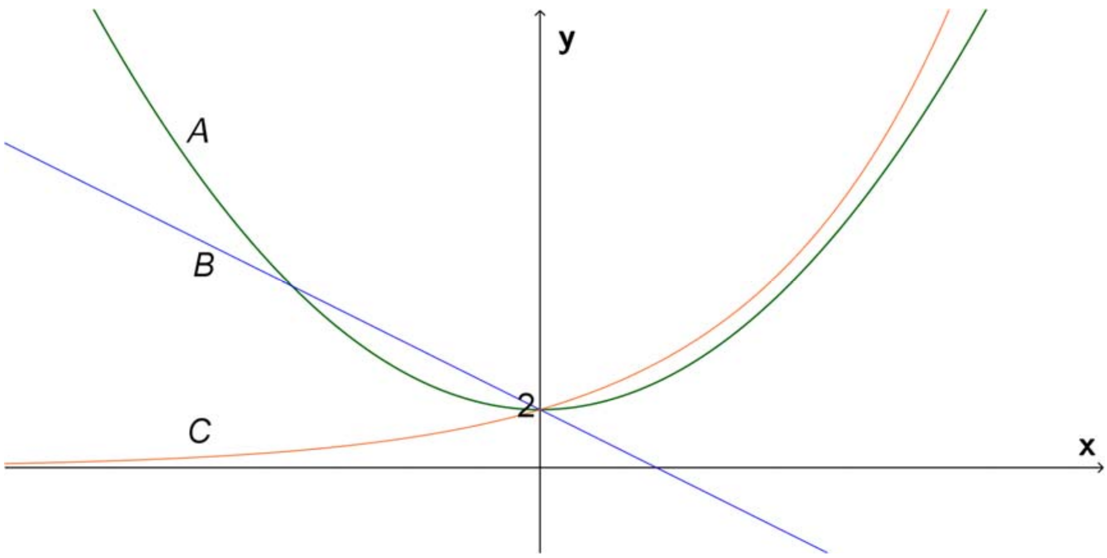
Opgave 1.22

Figuren viser graferne *A*, *B* og *C* for tre funktioner med forskrifterne

$$r(x) = 0,6 \cdot x^2 + 2$$

$$s(x) = 2 \cdot 1,6^x$$

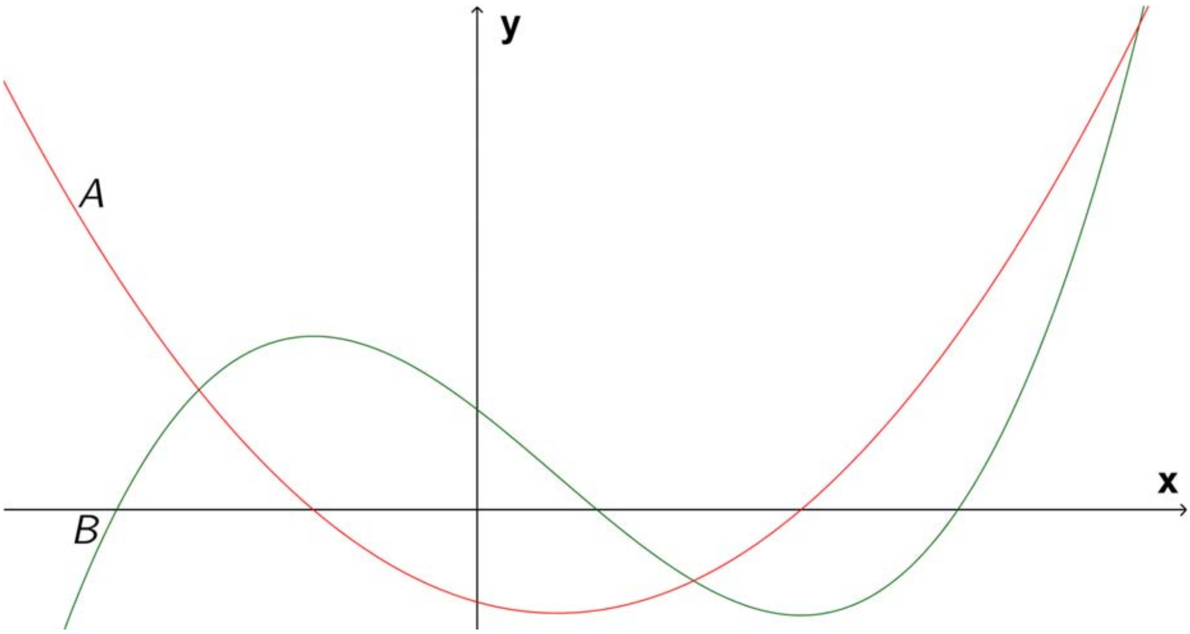
$$t(x) = -1,6 \cdot x + 2$$



a) Argumentér for hvilken graf der hører til hvilken funktion.

Opgave 1.23

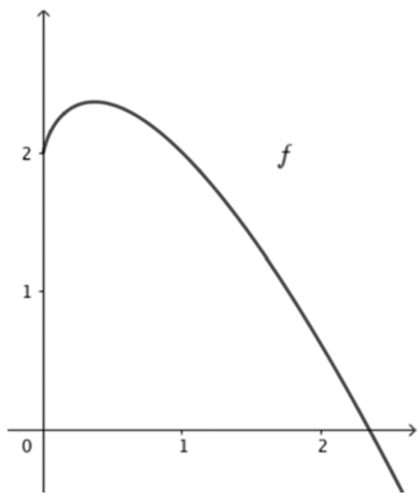
Figuren viser graferne for funktionen *f* og dens afledede f'.



a) Argumentér for hvilken af graferne *A* eller *B*, der er grafen for f'.

Opgave 1.24

Figuren viser en del af grafen for funktionen $f(x) = 2 - x \cdot \ln(x)$.



a) Bestem funktionens definitionsmængde $\mathrm{Dm}(f)$ og værdimængde $\mathrm{Vm}(f)$.

Opgave 1.25

Om en funktion *f* oplyses det, at $f'(x) = \sqrt{x+5} - 2 \cdot x$.

a) Bestem $f'(4)$ og forklar hvad denne værdi fortæller om *f*.

Opgave 1.26

En funktion *f* er bestemt ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 2 + \ln(x) \quad , \quad x > 0$$

a) Vis, at *f* er en løsning til differentialligningen $y' \cdot x = 3 \cdot y - 5 - 3 \cdot \ln(x)$.

Opgave 1.27

En differentialligning er givet ved

$$y' = y - 3 - 2x^2$$

a) Undersøg, om funktionen $f(x) = 2x^2 + 4x + 7$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 1.28

Funktionen *f* er bestemt ved forskriften

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x} + 3 \quad , \quad x > 0$$

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion *F* til *f*, som opfylder at $F(1) = 9$.

Opgave 1.29

Funktionen *f* er bestemt ved forskriften $f(x)=8x+2-\sin(x)$.

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion *F* til *f*, som opfylder at $F(0)=7$.

Opgave 1.30

a) Bestem tallet $\int_0^{\pi/6}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Opgave 1.31

En plan α har ligningen

$$2x-3y-7z=11$$

og er udspændt af vektorerne

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ og } \vec{r}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

a) Vis at punktet $P(2,0,-1)$ ligger i α.

b) Bestem en parameterfremstilling for α.

Opgave 1.32

Planen α har ligningen

$$2\cdot x-y+3\cdot z=8$$

a) Bestem en normalvektor til α.

b) Bestem koordinaterne til et punkt i α.

Opgave 1.33

a) Opskriv de første fem tal i talfølgen defineret ved $y_{n+1} = 2y_n - 2, \quad y_0 = 4$.

Opgave 1.34

Rekursionsligningen

$$y_{n+1} = (y_n^{\ 2} - 1)^2 \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

har netop én løsning, der opfylder at $y_0 = -1$.

a) Bestem de første fire tal i talfølgen, der er løsning til rekursionsligningen.

Opgave 1.35

Vis at talfølgen

$$3, 4, 6, 9, 13, 17, \ldots$$

ikke er en løsning til rekursionsligningen

$$y_{n+1} - y_n - n = 1 \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

der opfylder begyndelsesbetingelsen $y_0 = 3$.

Opgave 1.36

Den rekursive talfølge

$$y_{n+1} = y_n + 2 \cdot n + 3, \quad y_0 = 1$$

kan beskrive antallet af prikker i mønstret vist nedenfor.

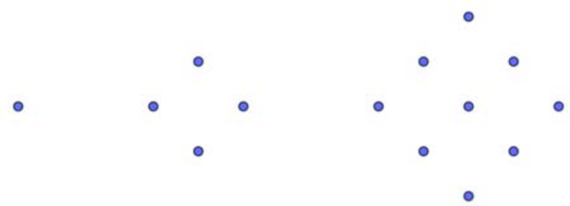


Fig.1 Fig. 2 Fig. 3

a) Bestem hvor mange prikker, der er i hver af de første seks figurer i rækken.

Opgave 1.37

a) Bestem den fuldstændige løsning til rekursionsligningen

$$y_{n+1} = 2y_n \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

b) Bestem løsningen, der opfylder betingelsen $y_2 = 8$.

Opgave 1.38

En rekursionsligning er givet ved

$$y_{n+1} - \tfrac{1}{2} \cdot y_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

b) Bestem løsningen, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y_0 = 4$.

c) Angiv de første tre tal i denne løsning.

Opgave 1.39

Funktionen *f* er givet ved forskriften $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

a) Opstil rekursionsligningen, der anvender Newtons metode til at finde nulpunkt for funktionen.

b) Anvend startgættet $x_0 = 7$ og angiv de første fire tal i talfølgen.

Opgave 1.40

Nedenfor er ligningen $2 + 7 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x} = 3$ løst.

a) Forklar hvad der sker i hver linje.

(1)	$2 + 7 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x} = 3$	Ligningen opskrives
(2)	$7 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x} = 1$	
(3)	$\ln(7 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}) = 0$	
(4)	$\ln(7) + \ln(\mathrm{e}^{4 \cdot x}) = 0$	Man bruger regnereglen $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ med $a = 7$ og $b = \mathrm{e}^{4 \cdot x}$
(5)	$4 \cdot x = -\ln(7)$	
(6)	$x = -\dfrac{\ln(7)}{4}$	

Dataanalyse

Opgave 2.1

Bornholm omtales ofte som ”solskinsøen”, men skinner solen mere på Bornholm end andre steder? På www.dmi.dk kan man se antallet af solskinstimer fordelt på forskellige områder i vejrarkivet. Bornholm og Fyn er danske øer. I vedhæftede fil fremgår antallet af solskinstimer per måned fra januar 2007 til december 2018.

a) Bestem kvartilsæt og middelværdi for antallet af solskinstimer for både Fyn og Bornholm.

b) Tegn et boksplot for antallet af solskinstimer for Fyn og Bornholm.

c) Præsentér de to datasæt grafisk.

d) Kommentér forskellene på antallet af solskinstimer med baggrund i svarene ovenfor.

Opgave 2.2

På Danske Medier Research (https://www.fdim.dk/statistik/internet/toplisten) kan man se data vedrørende de største nyhedshjemmesider fra maj 2007 til december 2013. I denne fil fremgår antallet af brugere i perioden hos hhv. dr.dk og tv2.dk.

a) Bestem middelværdi og spredning for de to datasæt.

b) Foretag en hensigtsmæssig gruppering af de to datasæt og bestem hyppigheden for hvert interval.

c) Tegn et histogram for hver af de to datasæt.

d) Kommentér forskellene på de to datasæt.

Opgave 2.3

På Danske Medier Research (https://www.fdim.dk/statistik/internet/toplisten) kan man finde data vedrørende de største nyhedshjemmesider fra maj 2007 til december 2013. I denne fil fremgår antallet af besøg i perioden hos dr.dk.

a) Beskriv datasættet ud fra tre selvvalgte deskriptorer.

Antallet af besøg hos tv2.dk i samme periode fremgår af nedenstående tabel.

Antal besøg per måned [mio.]	Hyppighed
]14;18]	20
]18;22]	21
]22;26]	34
]26;30]	5

b) Bestem frekvensen for hvert interval og angiv typeintervallet.

c) Tegn en sumkurve for antallet af besøgende hos tv2.dk.

d) Kommentér forskellen på antal besøgende i perioden hos hhv. dr.dk og tv2.dk.

Opgave 2.4

På Danske Medier Research (https://www.fdim.dk/statistik/internet/toplisten) kan man se data vedrørende de største nyhedshjemmesider fra maj 2007 til december 2013. I nedenstående tabel vises antallet af sidevisninger hos dr.dk.

Antal sidevisninger per måned [mio.]	Hyppighed
]60;80]	22
]80;100]	45
]100;120]	11
]120;140]	2

a) Bestem kvartilsættet for antallet af sidevisninger.

b) Bestem middelværdi og spredning for antallet af sidevisninger.

c) Tegn et histogram som viser tabellens data.

d) Tegn en sumkurve som viser tabellens data.

Opgave 2.5

Et datasæt er beskrevet ved dette udvidede kvartilsæt.

0. kvartil	1. kvartil	2. kvartil	3. kvartil	4. kvartil
20	30	50	70	80

a) Bestem variationsbredden og 10%-fraktilen for datasættet.

b) Bestem intervallet for de midterste 90% af datasættet.

c) Tegn et boksplot for datasættet.

Opgave 2.6

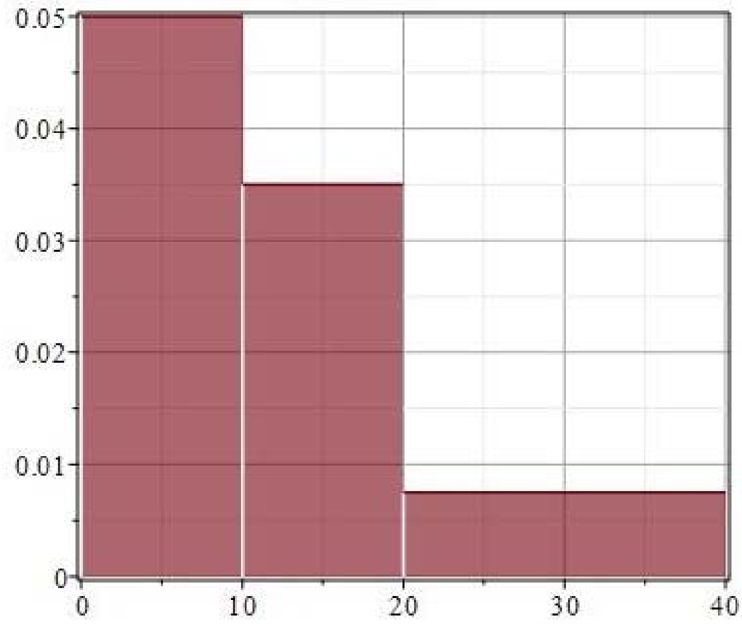
Interval	[0;10]	]10;20]	]20;30]	]30;50]
Hyppighed	5	25	15	5

a) Bestem typeintervallet og middelværdien for tabellens datasæt.

a) Bestem varians og spredning for tabellens datasæt.

Opgave 2.7

Figuren nedenfor viser et histogram for et datasæt.

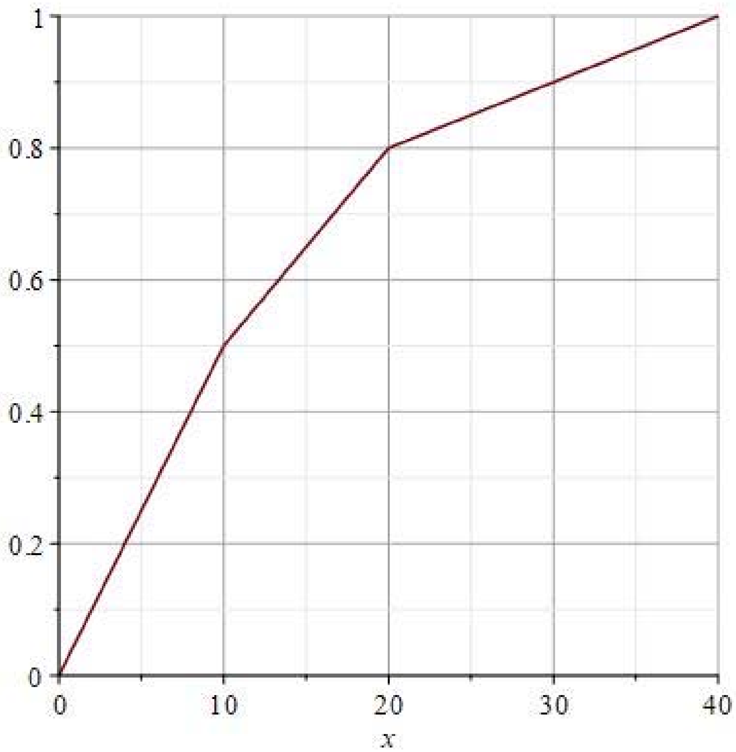


a) Bestem middelværdien for det viste datasæt.

b) Bestem kvartilsættet for det viste datasæt.

Opgave 2.8

Figuren nedenfor viser en sumkurve for et datasæt.



a) Bestem kvartilsættet for det viste datasæt.

b) Bestem middelværdien for det viste datasæt.

Opgave 2.9

Interval	[0;10]	]10;30]	]30;50]
Hyppighed	10	25	15

c) Bestem frekvensen for hvert interval.

d) Bestem middelværdien for tabellens datasæt.

e) Bestem kvartilsættet for tabellens data.

Opgave 2.10

Et datasæt er beskrevet ved dette udvidede kvartilsæt.

0. kvartil	1. kvartil	2. kvartil	3. kvartil	4. kvartil
10	15	30	40	50

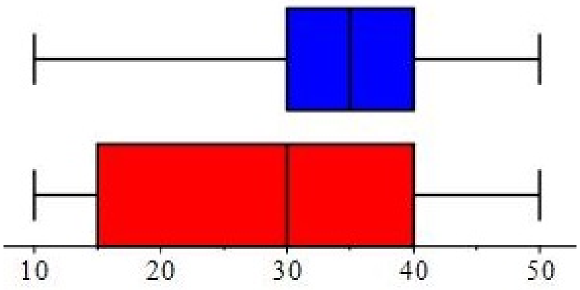
a) Bestem minimum, maksimum og median for datasættet.

b) Tegn en sumkurve for datasættet.

c) Bestem datasættets middelværdi.

Opgave 2.11

Figuren nedenfor viser et boksplot for to datasæt.



a) Bestem variationsbredden for begge datasæt.

b) Bestem kvartilsættet for begge datasæt.

c) Kommenter middelværdi og spredning for de to datasæt.

Diskret Matematik

Opgave 3.1

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 2$$

a) Vis, at rekursionsligningen

$$y_{n+1} = (1 + 3n) \cdot y_n + 2h$$

svarer til Eulers metode for differentialligningen.

b) Vis, at $z_n = -\frac{2}{3}$ er en partikulær løsning til rekursionsligningen fra spørgsmål a) .

c) Bestem de tre første tal i løsningen til rekursionsligningen fra spørgsmål a), der opfylder begyndelsesbetingelsen $y_0 = 1$, hvor $h = 0{,}1$.

d) Beskriv, hvordan løsningen til rekursionsligningen kan benyttes til at opskrive en tilnærmet løsning til differentialligningen.

Opgave 3.2

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 2$$

a) Opskriv rekursionsligningen, der svarer til Eulers metode for differentialligningen.

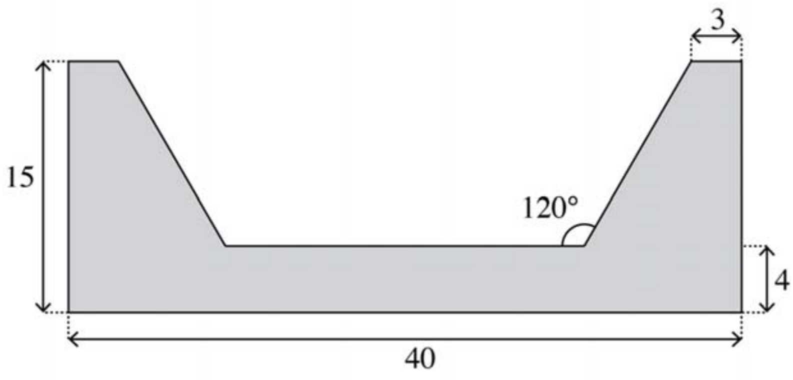
b) Sæt $h = 0{,}1$ og opskriv de fem første punkter i den tilnærmede løsning af differentialligningen med begyndelsesbetingelsen $y(1) = 1$.

Øvrigt

Opgave 4.1

En håndvask kan beskrives som et omdrejningslegeme om y-aksen.

Figur 1 viser et tværsnit af håndvasken med mål. Alle længder er i cm.



Figur 1

a) Indlæg tværsnittet i et koordinatsystem og bestem en forskrift for funktionen f, der beskriver den øverste afgrænsning af tværsnittet.

Håndvasken er lavet af porcelæn med en massefylde på 2,2 kg/L.

b) Bestem vaskens vægt.

c) Bestem det totale rumfang vasken kan indeholde.

Bemærk: Omdrejningslegemer om y-aksen er en del af kernestoffet, hvorfor ovenstående opgave er medtaget for at understrege dette.