BINOMIALTEST

JETTE VESTERGAARD

FIP BIOLOGI

MARSELISBORG GYMNASIUM D. 13. MARTS 2019

KALUNDBORG GYMNASIUM D. 14. MARTS 2019

HVEM ER JEG ?

- 1998: Cand.scient. fra Aarhus Universitet
- Hovedfag i teoretisk statistik og sidefag i matematik
- 1995-1999: Instruktor på Biostatistik og Geostatistik ved Matematisk Institut, Aarhus Universitet
- 1998: Statistiker på Kommunehospitalet i København
- 1999: Pædagogikum på Hasseris Gymnasium
- 2000-nu: Matematiklærer på Dronninglund Gymnasium
- 2018-nu: Kvalitetssikrer i biologi A ved UVM, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet

HVORFOR BINOMIALTEST I BIOLOGI ?

Statistik i matematik-læreplanen under de sidste tre reformer:

- 1988-2005: Valggymnasiet
  - Binomialfordeling
  - Normalfordeling
- 2005-2017: Studieretningsgymnasiet
  - Chi-i-anden-test
  - Valgfri fordeling (supplerende stof)
- 2017-nu: Studieretningsgymnasiet (nu uden AT)
  - Binomialfordeling
  - Binomialtest

BINOMIALFORSØG

- Et binomialforsøg består af en række uafhængige gentagelser af et bestemt eksperiment, **basiseksperimentet**.
- To udfald: **succes** eller **fiasko**.
- Sandsynligheden for succes kaldes $\boldsymbol{p}$ og betegnes **sandsynlighedsparameteren**.
- Antallet af gentagelser kaldes $\boldsymbol{n}$ og betegnes **antalsparameteren**.
- Lad X være lig med antallet af succes'er.
- Man siger, at X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p.
- Den korte skrivemåde for dét er: $X \sim b(n,p)$.

TO EKSEMPLER PÅ BINOMIALFORSØG

Forsøg: 10 kast med ærlig mønt

- Basiseksperiment: Ét kast med en mønt.
- Succes: Plat.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 1/2$.
- Antalsparameter: $n = 10$.
- X = Antal succes'er (plat).
- $X \sim b(\,10\,, 1/2\,)$.

Forsøg: 10 kast med ærlig terning

- Basiseksperiment: Ét kast med en terning.
- Succes: Sekser.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 1/6$.
- Antalsparameter: $n = 10$.
- X = Antal succes'er (sekser).
- $X \sim b(\,10\,, 1/6\,)$.

BINOMIALFORSØG I FORBINDELSE MED STIKPRØVER

- Stikprøve med tilbagelægning
  - Optræder ofte i matematik. F.eks. Trække kugler op af en krukke (urne). Ægte binomialforsøg.
- Stikprøve uden tilbagelægning
  - Ofte tilfældet i biologi. F.eks. Udvælge en stikprøve af orangutanger på Borneo.
  - Stikprøver uden tilbagelægning kan behandles som stikprøver med tilbagelægning, hvis stikprøven maksimalt udgør 10 % af populationen. Tilnærmet binomialforsøg.

BINOMIALFORDELING

Forsøg: 10 kast med ærlig mønt

- Basiseksperiment: Ét kast med en mønt.
- Succes: Plat.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 1/2$.
- Antalsparameter: $n = 10$.
- X = Antal succes'er (plat).
- $X{\sim}b(\,10\,,1/2\,)$.

Mønten kastes 10 gange. Der er derfor mulighed for mellem 0 og 10 succes'er.

Vi ønsker at finde sandsynligheden for de forskellige antal succes'er.

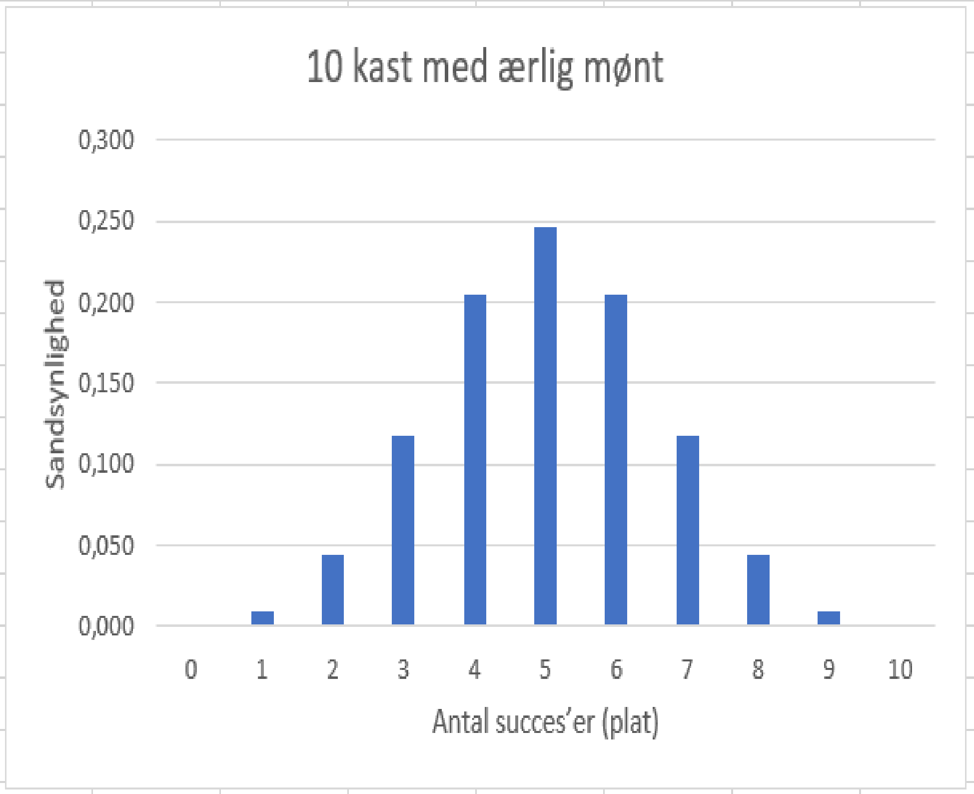
Intuitivt regner vi med, at 0 eller 10 succes'er er det mest *u*sandsynlige, og at 5 succes'er er det mest sandsynlige.

Resten overlader vi til Excel.

10 KAST MED MØNT - FORTSAT

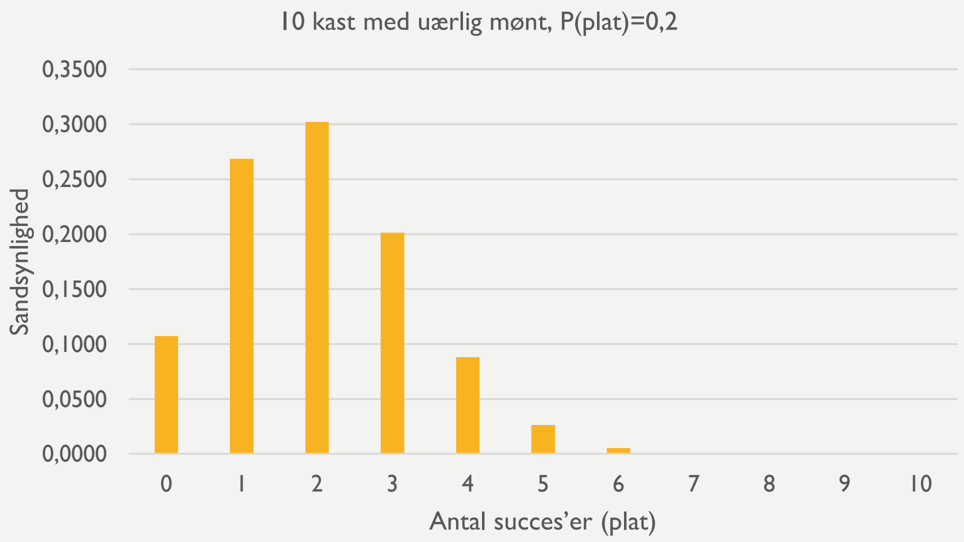
6	Antal succes'er	Sandsynlighed
7	0	0,001
8	1	0,010
9	2	0,044
10	3	0,117
11	4	0,205
12	5	0,246
13	6	0,205
14	7	0,117
15	8	0,044
16	9	0,010
17	10	0,001

Disse sandsynligheder kaldes for en binomialfordeling.

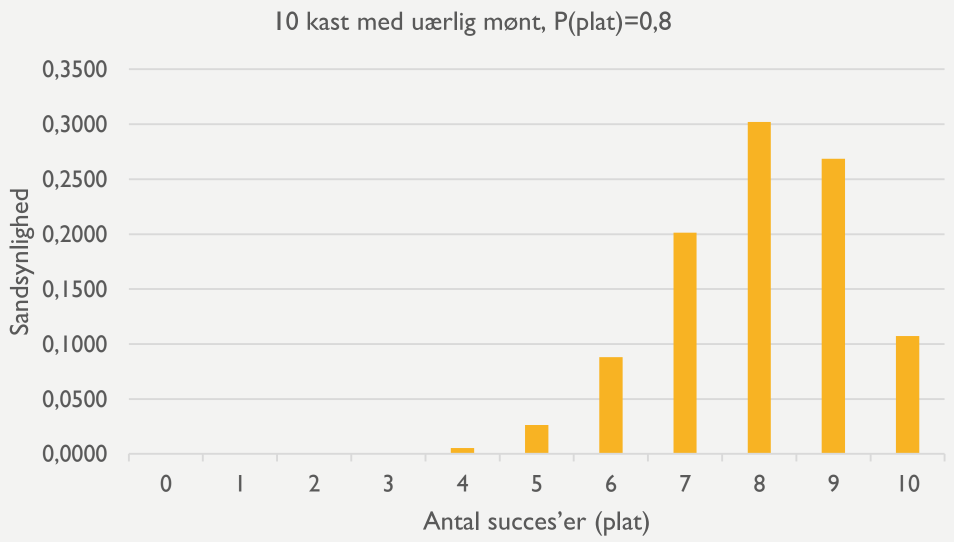


HVIS MØNTEN HAVDE VÆRET UÆRLIG !

Hvis sandsynligheden for plat havde været f.eks. $p = 0{,}2$, havde diagrammet set således ud:



Hvis sandsynligheden for plat havde været f.eks. $p = 0{,}8$, havde diagrammet set således ud:



BINOMIALTEST

Der er to typer af binomialtest:

- Tosidet binomialtest
- Etsidet binomialtest

Begge test tager udgangspunkt i et binomialforsøg, enten et ægte eller et tilnærmet.

Det vil ofte være en undersøgelse af et eller andet, hvor der er taget en stikprøve uden tilbagelægning, dvs et tilnærmet binomialforsøg.

TOSIDET BINOMIALTEST

Eksempel:

Tidligere undersøgelser har vist, at 10 % af befolkningen i Danmark har blodtype B.

I en stikprøve på 90 personer blev 15 testet til at have blodtype B. Giver stikprøven grund til mistanke om en ændring i blodtype-B-fordelingen ?

Umiddelbart, så udgør de 15 personer $\frac{15}{90} = 0{,}167 = 16{,}7\ \%$ af stikprøve, hvilket er mere end de 10 %, som plejer at have blodtype B.

Spørgsmålet er nu, om denne afvigelser er så stor, at vi kan konkludere, at der er sket en ændring i blodtypefordelingen i hele befolkningen.

EKSEMPEL MED BLODTYPE B - FORTSAT

Nulhypotese:

H_0 : Blodtype-B-fordelingen er uændret, dvs der er stadig 10 %, der har blodtype B.

Alternativ hypotese (den der gælder, hvis nulhypotesen forkastes):

H_A : Blodtype-B-fordelingen har ændret sig.

Bemærk! (og nu bliver det lidt tricky!) Man kunne her godt fristes til at opstille den alternative hypotese, at andelen af blodtype B er steget, fordi vi jo kan se, at det er den i stikprøven. Det må vi imidlertid ikke! Den alternative hypotese skal altid opstilles inden stikprøven tages. Hvis man så alligevel opstiller den efter, at stikprøven er taget, skal man forestille sig, at man ikke har den viden, som stikprøven giver én, når man opstiller den alternative hypotesen.

EKSEMPEL MED BLODTYPE B - FORTSAT

1) Binomialforsøg ?

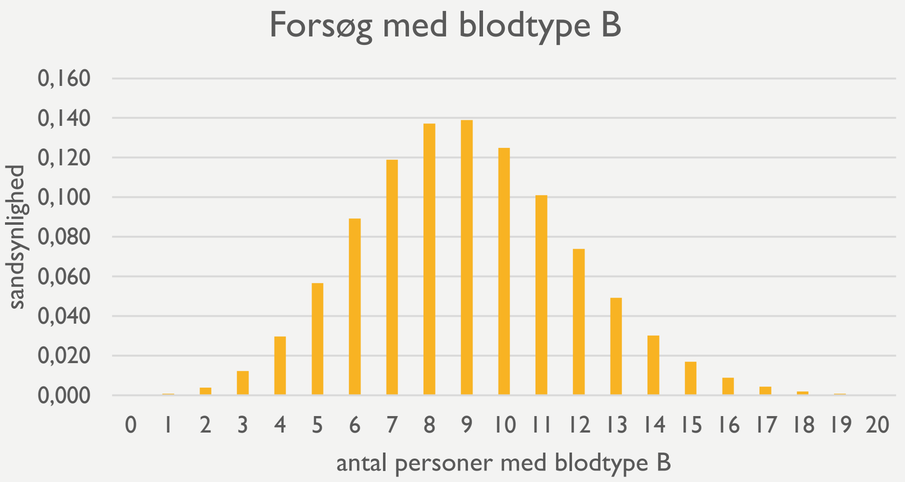
Der er tale om en stikprøve uden tilbagelægning, men da stikprøven (90 personer) er meget lille i forhold til hele befolkningen (ca. 5,8 mio), kan vi tillade os at betragte forsøget som værende med tilbagelægning.

Dermed kan vi tillade os at betragte forsøget som et binomialforsøg, som vi kort kan beskrive på følgende måde:

- Basiseksperiment: Udvælge én person.
- Succes: Blodtype B.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 0{,}10$.
- Antalsparameter: $n = 90$.
- X = Antal succes'er.
- $X \sim b(\ 90\ ;\ 0{,}10\ )$.
- Den observerede værdi af X (teststørrelsen) er $x_0 = 15$.

EKSEMPEL MED BLODTYPE B - FORTSAT

2) Punktsandsynligheder:



Det ses, at 9 personer er det mest sandsynlige. Det er også hvad vi forventede (10 % af 90 personer).

Spørgsmålet er bare, om 15 personer er så lidt sandsynligt, at vi kan konkludere, at der er sket en ændring i blodtypefordelingen i hele befolkningen.

Vi vælger som regel at sige, at hvis vi har observeret noget, der er under 5 % sandsynligt, så må vores startantagelse (altså vores nulhypotese) være forkert.

De 5 % kaldes testets signifikansniveau.

EKSEMPEL MED BLODTYPE B - FORTSAT

3) Kritisk mængde:

Vi skal altså have fundet de 5 % mindst sandsynlige observationer i vore blodtypeforsøg. Observationer langt fra de forventede 9 personer er de mest kritiske for nulhypotesen.

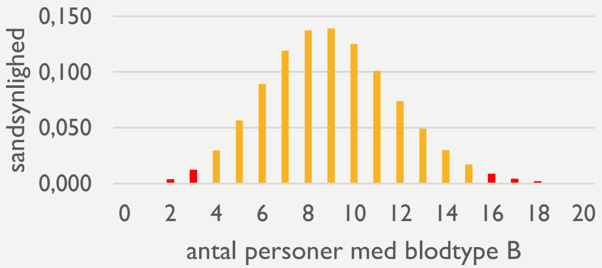
Vi skal derfor have fundet de yderste observationer i begge sider (i halerne af binomialfordelingen - deraf navnet tosidet test), som i hver side har en samlet sandsynlighed på maksimalt 2,5 %.

Hvis vi lægger sammen fra toppen overstiger vi 2,5 % ved x=4. Altså er x=4 ikke en kritisk værdi.

Hvis vi lægger sammen fra bunden overstiger vi 2,5 % ved x=15. Altså er x=15 ikke en kritisk værdi.

Den kritiske mængde bliver derfor:

$K = \{ 0 , \ldots , 3 , 16 , \ldots , 90 \}$.



Antal succeser	sandsynlighed
0	0,000
1	0,001
2	0,004
3	0,012
4	0,030
5	0,057
6	0,089
7	0,119
8	0,137
9	0,139
10	0,125
11	0,101
12	0,074
13	0,049
14	0,030
15	0,017
16	0,009
17	0,004
18	0,002
19	0,001
20	0,000

EKSEMPEL MED BLODTYPE B - FORTSAT

4) Konklusion:

Da den observerede værdi $x_0 = 15$ ikke ligger i den kritiske mængde ved et signifikansniveau på 5 %, kan vi *ikke* forkaste nulhypotesen.

På baggrund af denne undersøgelse kan vi altså ikke konkludere, at blodtype-B-fordelingen i befolkningen er ændret.

Strukturen i løsning af en opgave om binomialtest:

Opgave, nulhypotese, alternativ hypotes.

1) Binomialforsøg ?

2) Punktsandsynligheder.

3) Kritisk mængde.

4) Konklusion.

OPGAVE OM ORANGUTANGER

Forskere har den hypotese, at orangutanger med genotype W2W2 har øget modstandsdygtighed over for malaria. De forventer derfor ikke, at populationen af orangutanger er i Hardy-Weinberg ligevægt. For at teste dette opstiller de nulhypotesen

H_0: Der er Hardy-Weinberg ligevægt i populationen, dvs frekvensen af W2W2 er 0,096.

For at teste hypotesen observerer de blandt 54 orangutanger, at 11 af dem har genotypen W2W2.

Den alternative hypotese er her:

H_A : Der er ikke Hardy-Weinberg ligevægt i populationen.

OPGAVE OM ORANGUTANGER - FORTSAT

1) Binomialforsøg ?

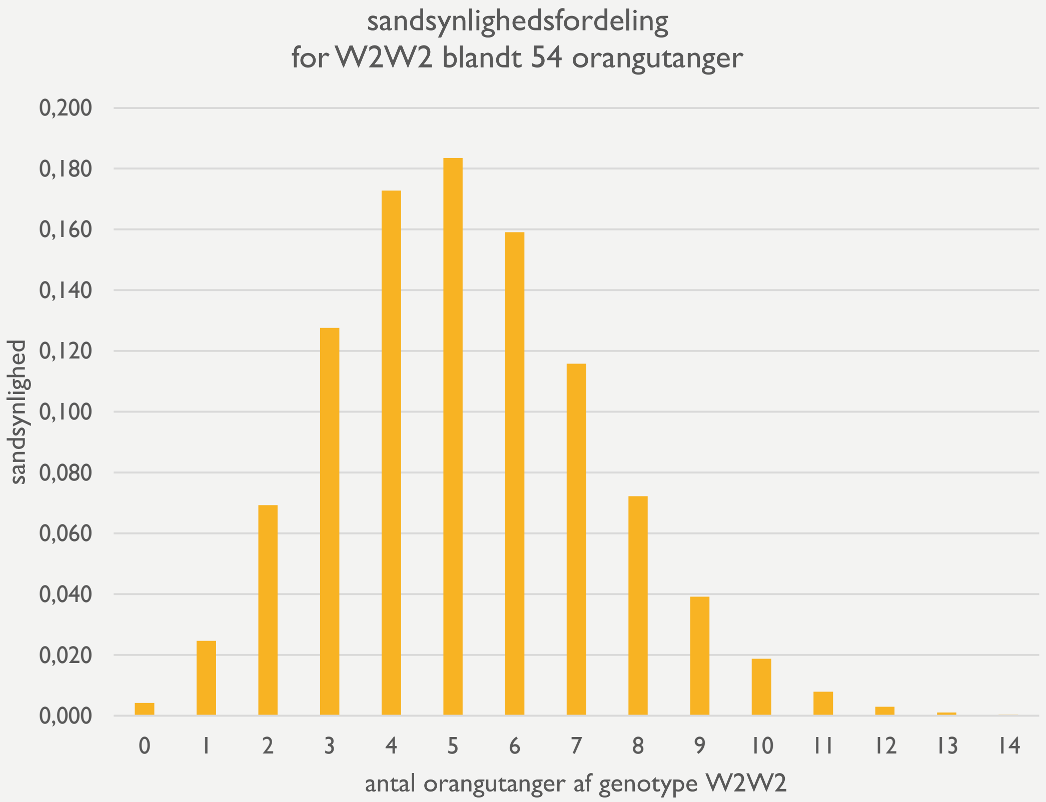
Der er tale om en stikprøve uden tilbagelægning. Da hypotesen ønskes testet ved et binomialtest, antager vi, at stikprøven er lille i forhold til populationen, altså at den højest udgør 10 % af populationen. Dvs at vi antager, at der mindst er 540 orangutanger på Borneo.

Dermed kan vi tillade os at betragte forsøget som et binomialforsøg, som vi kort kan beskrive på følgende måde:

- Basiseksperiment: Udvælge én orangutang.
- Succes: Genotype W2W2.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 0{,}096$.
- Antalsparameter: $n = 54$.
- X = Antal succes'er.
- $X \sim b(\,54\,;\ 0{,}096\,)$.
- Den observerede værdi af X (teststørrelsen) er $x_0 = 11$.

OPGAVE OM ORANGUTANGER - FORTSAT

2) Punktsandsynligheder.



Det ses, at det mest sandsynlige antal orangutanger med genotype W2W2 er 5 ved en stikprøve på 54 orangutanger.

OPGAVE OM ORANGUTANGER - FORTSAT

3) Kritisk mængde:

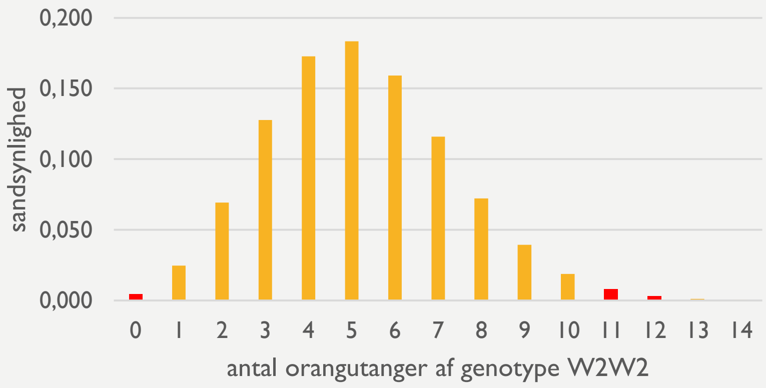
Da vi skal teste nulhypotesen ved et signifikansniveau på 5 %, skal vi have fundet de 2,5 % mindst sandsynlige observationer i hver side (hale) af binomialfordelingen.

Hvis vi lægger sammen fra toppen overstiger vi 2,5 % ved x=1. Altså er x=1 ikke en kritisk værdi.

Hvis vi lægger sammen fra bunden overstiger vi 2,5 % ved x=10. Altså er x=10 ikke en kritisk værdi.

Den kritiske mængde bliver derfor:

$K = \{ 0 , 11 , \dots , 54 \}$.



Antal succes'er	sandsynlighed
0	0,004
1	0,025
2	0,069
3	0,128
4	0,173
5	0,184
6	0,159
7	0,116
8	0,072
9	0,039
10	0,019
11	0,008
12	0,003
13	0,001
14	0,000

OPGAVE OM ORANGUTANGER - FORTSAT

4) Konklusion:

Da $x_0 = 11$ ligger i den kritiske mængde, kan vi nu *forkaste* nulhypotesen ved et signifikansniveau på 5 %. Vi må derfor ved et signifikansniveau på 5 % konkludere, at der *ikke* er Hardy-Weinberg ligevægt i populationen.

Dette kan måske skyldes, at genotypen W2W2 er mere modstandsdygtig overfor malaria end de to andre genotyper er. Men det har vi ikke bevist her. Her har vi blot vist, at det er overvejende sandsynligt, at der ikke er Hardy-Weinberg ligevægt i populationen.

ETSIDET BINOMIALTEST

I det tosidede binomialtest var observerede værdier (teststørrelser) langt fra det mest sandsynlige antal kritiske for nulhypotesen. Og det gjaldt både for observerede værdier langt til venstre og langt til højre for det mest sandsynlige antal.

I et etsidet binomialtest er kun værdier <u>*enten*</u> langt til venstre <u>*eller*</u> langt til højre for det mest sandsynlige antal kritiske for nulhypotesen. De to test kaldes henholdsvis venstresidet og højresidet binomialtest.

EKSEMPEL MED TULIPANLØG

I et gartneri fremstilles tulipanløg, og det antages, at 75 % af løgene er spiringsdygtige.

Løgene sælges i poser med 40 løg, tilfældigt udvalgt af gartneriets produktion.

En kunde tror ikke på, at der er 75 % spiringsdygtige løg i produktionen. Han køber derfor en pose løg, lægger dem i jorden og konstaterer, at kun 25 ud af de 40 løg spirer.

Undersøg om nulhypotesen

$$H_0 : \text{Mindst 75 \% af løgene er spiringsdygtige.}$$

kan forkastes ved et signifikansniveau på 5 %.

Den alternative hypotese er her:

$$H_A : \text{Under 75 \% af løgene er spiringsdygtige.}$$

EKSEMPEL MED TULIPANLØG - FORTSAT

H_0 : Mindst 75 % af løgene er spiringsdygtige.

Her vil kun små observerede værdier være kritiske for nulhypotesen (da en observeret værdi på f.eks. 38 spirede løg ikke er kritisk for hypotesen om, at mindst 75 % af løgene spirer).

Vi skal derfor finde de 5 % mindst sandsynlige observerede værdier til venstre i diagrammet over punktsandsynligheder. Testet kaldes derfor for et venstresidet binomialtest.

(Hvis kun store værdier er kritiske for nulhypotesen, kaldes testet for et højresidet binomialtest.)

EKSEMPEL MED TULIPANLØG - FORTSAT

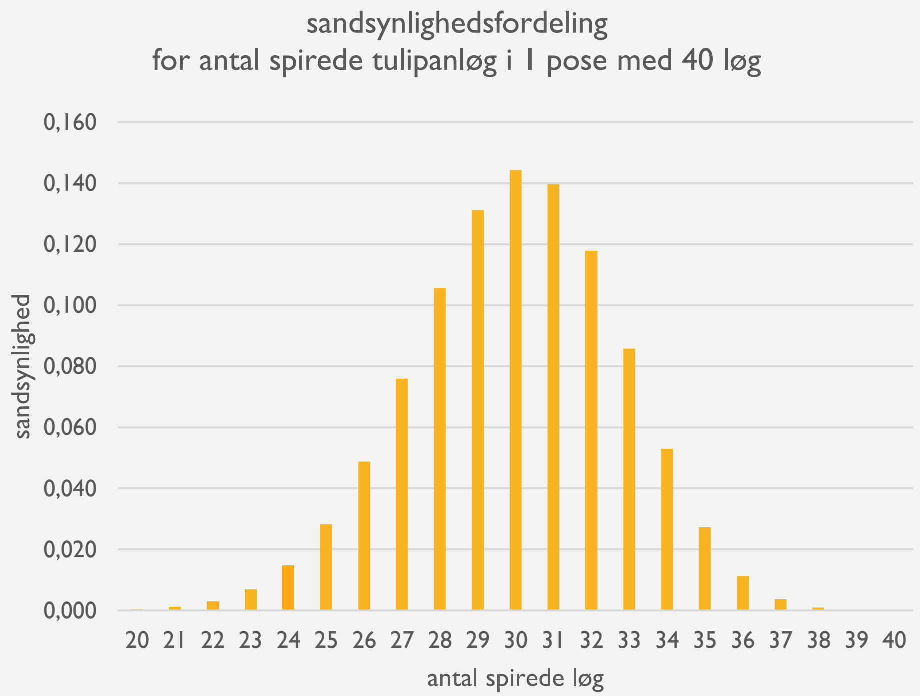
1) Binomialforsøg ?

Der er tale om en stikprøve uden tilbagelægning. Da vi ønsker at teste hypotesen ved et binomialtest, antager vi, at stikprøven er lille i forhold til populationen, altså at den højest udgør 10 % af populationen. Dvs at gartneriet producerer mere end 10 poser med tulipanløg. Dermed kan vi tillade os at betragte forsøget som et binomialforsøg, som vi kort kan beskrive på følgende måde:

- Basiseksperiment: Udvælge ét tulipanløg.
- Succes: At tulipanløget spirer.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 0{,}75$.
- Antalsparameter: $n = 40$.
- X = Antal succes'er.
- $X \sim b(\ 40\ ;\ 0{,}75\ )$.
- Den observerede værdi af X (teststørrelsen) er $x_0 = 25$.

EKSEMPEL MED TULIPANLØG - FORTSAT

2) Punktsandsynligheder.



Det ses, at det mest sandsynlige antal spirede løg er 30 ved en stikprøve på 40 tulipanløg.

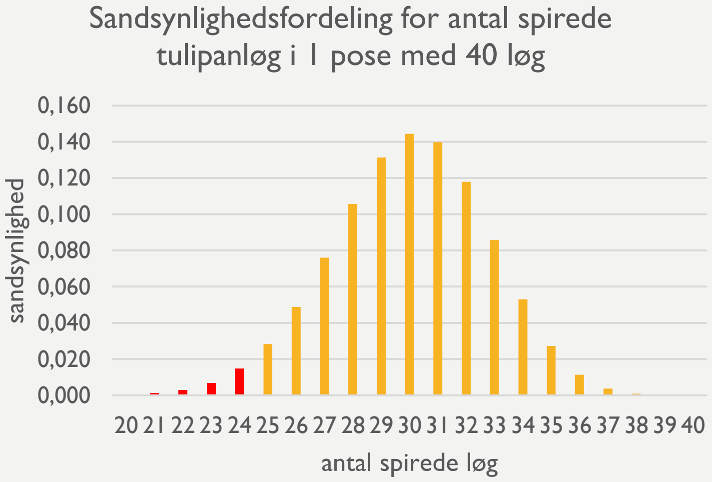
EKSEMPEL MED TULIPANLØG - FORTSAT

3) Kritisk mængde:

Da vi skal teste nulhypotesen ved et signifikansniveau på 5 %, skal vi have fundet de 5 % mindst sandsynlige observationer til venstre i binomialfordelingen.

Hvis vi lægger sammen fra toppen overstiger vi 5 % ved x=25. Altså er x=25 ikke en kritisk værdi.

Den kritiske mængde bliver derfor: $K = \{0, \ldots, 24\}$.



20	0,000
21	0,001
22	0,003
23	0,007
24	0,015
25	0,028
26	0,049
27	0,076
28	0,106
29	0,131
30	0,144
31	0,140
32	0,118
33	0,086
34	0,053
35	0,027
36	0,011
37	0,004
38	0,001
39	0,000
40	0,000
Antal succes'er	sandsynlighed

EKSEMPEL MED TULIPANLØG - FORTSAT

4) Konklusion:

Da $x_0 = 25$ ikke ligger i den kritiske mængde, kan vi *ikke* forkaste nulhypotesen ved et signifikansniveau på 5 %.

Altså må vi ved et signifikansniveau på 5 % konkludere, at der ud fra denne stikprøve ikke er belæg for at konkludere, at producenten ikke taler sandt vedrørende spiringsprocenten for tulipanløg.

STIKPRØVESTØRRELSENS BETYDNING

Forsøg: 6 kast med terning.

3 kast giver en sekser.

H_0: Terningen er ærlig.

H_A: Terningen er uærlig.

- Basiseksperiment: Ét kast med terningen.
- Succes: Sekser.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 1/6$.
- Antalsparameter: $n = 6$.
- X = Antal succes'er. $X \sim b(\,6\,; 1/6\,)$.
- Den observerede værdi af X er $x_0 = 3$.

Kritisk mængde: K={ 4 , 5 , 6 }.

Dvs nulhypotesen *forkastes ikke*.

Forsøg: 60 kast med terning.

30 kast giver en sekser.

H_0: Terningen er ærlig.

H_A: Terningen er uærlig.

- Basiseksperiment: Ét kast med terningen.
- Succes: Sekser.
- Sandsynlighedsparameter: $p = 1/6$.
- Antalsparameter: $n = 60$.
- X = Antal succes'er. $X \sim b(\,60\,; 1/6\,)$.
- Den observerede værdi af X er $x_0 = 30$.

Kritisk mængde: K={ 0,1,2 , 20,…,60 }.

Dvs nulhypotesen forkastes.

THE END