

Tællemetoder	Niveau 1	LÆRER
--------------	----------	-------

Nummerplader – Eller fornøjelsen ved tælle

Introduktion

Mange problemstillinger – virkelige såvel som matematiske indeholder tællinger. Små tællinger afgøres måske nemt ved simpelthen at starte forfra og se, hvor man ender. Men større tællinger kræver lidt mere systematiske overvejelser. Omdrejningspunktet for denne opgave er at bestemme, hvor mange biler det er muligt at registrere med det nummerpladesystem, vi har i Danmark.

Vejledning til lærerens arbejde

Forløbet handler om elevernes evne til systematisk at gennemfører større tælleprocesser. Det er derfor afgørende at holde igen på, hvad man giver eleverne af hint, ideer osv., men omvendt at insistere på, at de undersøger og argumenterer systematisk. Lærerens rolle er at være 'forskningsleder' - altså ikke at være den der sidder inde med svarene. Nedenstående er en tekst til læreren. Eleverne præsenteres for opgaverne gennem slides og uddelt materiale.

Forudsætninger

Bekendtskab med simple tælletræer og tælleprocesser, samt kendskab til additionsprincippet og multiplikationsprincippet.

Genererende spørgsmål

Hvor mange biler er det muligt at registrere?

Tilsigtet læringsmål

Eleverne skal kunne gennemføre mere omfattende tælleprocesser på systematisk vis og kunne argumentere for, at alle muligheder er talt med. Det umiddelbare svar på det genererende spørgsmål, selve tællefacit, er i sig selv uinteressant. Spørgsmålet bliver først *genererende*, ved at give anledning til systematik og argumentation for tælleprincipper, fx en diversitet af konkrete kombinationer af det additive og det multiplikative princip. Det er ikke tilstrækkeligt 'at det ser ud til at eleverne har forstået det', fordi de får det rigtige resultat.

Hvis additions- og multiplikationsprincippet er bekendt kan man repetere principperne som del af introduktionen. I det tilfælde vil de fungere som del af forudsætningerne. Hvis principperne ikke er bekendt kan de indgå som del af læringsmålene. De kan så behandles i en passende sammenhæng med en af opsamlingerne på elevarbejdet. Læringsmålet vil da være, at eleverne i forbindelse med en argumentation skal kunne bruge principperne til at opstille det regnestykke der repræsenterer tælleprocessen.

Forslag til redskaber

Blyant/papir, tavle/farvekridt, lommeregner eller computer.

Den udfoldende opgave

(Opgaven præsenteres for eleverne på slides)

Nummerplade i Danmark er sammensat af to bogstaver og 5 cifre. Fra Wikipedia kan man læse følgende om reglerne for, hvilke bogstavs kombinationer der anvendes her:

"I Danmark er nummerpladerne til køretøjer opbygget med to bogstaver og tre til fem cifre. Undtaget er dog de såkaldte ønskenummerplader, hvor man kan bestille en valgfri kombination af fra to til syv cifre og/eller bogstaver, så længe det ikke vurderes som anstødeligt.

På almindelige nummerplader anvendes bogstaverne I, Q, Æ, Ø og Å ikke. Bogstavet O bruges kun som første bogstav i en kombination. En række bogstavkombinationer vurderes som uhensigtsmæssige og overspringes: BH, BU, CC, CD, DK, DU, EU, KZ, MU, PU, PY, SS, UD, UN og VC. Ligeledes overspringes over 100 bogstavkombinationer som blev anvendt i de enkelte politikredse før Centralregisteret for Motorkøretøjer overtog registreringen i slutningen af 1960'erne. Ved indførelsen af de digitale register i 2011 starter man dog forfra med AA og da vil alle bogstav-nummer der har været ledige i mindst 12 år, blive genbrugt, idet de nævnte uheldige bogstavkombinationer stadig overspringes.”

Kilde: <https://da.wikipedia.org/wiki/Nummerplade>

Endvidere kan man se noget om cifrene, der bruges her:

Art	Farve	Løbenummer
Stor knallert	Hvid	1 - 699
Traktorer	Hvid	700 - 999
Påhængsvogne og campingvogne	Hvid	1000 - 2999
Udgået (Bogstavkombinationer opbrugt)		3000 - 4999
Faste prøveskilte til biler	Hvid	5000 - 5399
Faste prøveskilte til motorcykler	Hvid	5400 - 5499
Påhængsvogne (indtil bogstav UZ)	Gul	5500 - 9999
Lille Knallert (fra bogstav VB)	Gul	5500 - 9999
Motorcykler/påhængsvogn til motorcykel)	Hvid	10000 - 18999
Godkendte traktorer	Hvid	19000 – 19499
Motorcykler	Gul	19500 – 19999
Biler,(rektangulære nummerplader)	Hvid	20000 – 59999
Biler,(rektangulær fornummerplade og "kvadratisk" bagnummerplade	Hvid	60000 - 75999
Biler (diplomater)	Blå	76000 - 76999
Biler (diplomater)	Blå	77000 - 77999
Biler,(rektangulær fornummerplade og "kvadratisk" bagnummerplade	Gul	78000 – 87999
Biler,(rektangulær nummerplade sæt)	Gul	88000 – 97999
Biler,(rektangulær nummerplade sæt)	Hvid	98000 – 99699
Biler,(rektangulær fornummerplade og "kvadratisk" bagnummerplade)	Hvid	99700 - 99999

Kilde: https://www.politi.dk/NR/rdonlyres/9CD57C04-99EA-4B9E-BA00-A0572DD95DB3/0/Oversigt_nummerplader.pdf

Første fase – opgave 1 på elevslides

Vi starter med nogle simple eksempler. Vi laver en simpel nummerplade med ét bogstav og to cifre. Vi bruger kun de første 6 bogstaver. For at gøre det nemt, begrænser vi tallene til at være 2 og 3 for det første ciffer og 0, 1, 2,3 for andet ciffer.

- Lav en optælling, der viser hvor mange forskellige nummerplader, der er.
- Kan du fx ved hjælp af en tegning/figur eller en tabel lave en oversigt, der viser, at du har alle muligheder? Oversigten skal kunne bruges til at overbevise en anden elev i klassen om, at du har ret.
- Kan du formulere noget om, hvilken systematik du bruger.

Eleverne arbejder i grupper. Elevarbejdet skal munde ud i, at de præsenterer deres resultater i klassen.

Læreren lader eleverne arbejde selvstændigt. For læreren handler denne fase om observation og præcisering af opgaverne i det omfang, der måtte være uklarheder eller misforståelser.

Anden fase

Grupperne organiserer en præsentation af deres svar på opgaverne. Resultater, argumenter og metoder diskuteres – i første omgang mhp., om der er umiddelbar overensstemmelse, og dernæst, om der er flere svar, der grundlæggende er ens. Endeligt hvis der er fundamentale uoverensstemmelser, diskuteres det, hvilke svar der er rigtige, mere hensigtsmæssige, elegante, ...

Eleverne præsenterer deres svar gruppevis. Elever i de grupper, der ikke fremlægger, er kritiske lyttere og stiller spørgsmål til fremlæggelsen.

Læreren lader grupperne præsentere deres svar, og i første omgang diskuterer de indbyrdes deres svar. Læreren har her rollen som ordstyrer. Diskussionen styres rimeligt stramt og munder ud i, at læreren samler op og konkluderer således, at de faglige pointer fremtræder klart.

Tredje fase – opgave 2 på elevslides

Antag igen, at vi laver nummerplader med 1 bogstav og to cifre. Som i ciffer oversigten fremgår det, at danske nummerplader til biler ikke har 0 og 1 som første ciffer. Bogstaverne I, Q, Æ Ø og Å bruges ikke – og heller ikke O (da det ikke bruges som første bogstav).

Hvor mange kombinationer findes der i dette nummerplade system? Findes der en simpel måde at udregne det på? Prøv at formulere, hvordan det kan gøres.

Eleverne arbejder videre i grupperne med den nye opgave.

Læreren. Det er vigtigt for den undersøgende tilgang, at det er elevenernes eget selvstændige arbejde som danner udgangspunkt, ikke løsningsforslag som er fremkommet vha. vink og hints fra læreren.

Fjerde fase

Opsamling som i fase 2, dvs. grupperne præsenterer deres svar – med efterfølgende diskussion.

Eleverne præsenterer deres svar gruppevis. Elever i de grupper, der ikke fremlægger, er kritiske lyttere.

Læreren lader grupperne præsentere deres svar, og i første omgang diskuterer de indbyrdes deres svar. Læreren har her rollen som ordstyrer. Diskussionen styres rimeligt stramt og munder ud i, at læreren samler op – denne gang også med reference til konklusionerne fra den første opsamling.

Femte fase – opgave 2 på elevslides

Nu går vi over til det danske nummerplade system, men begrænser os til biler – dvs. de sidste 8 kategorier i oversigten ovenfor. Hvor mange kombinationer findes der i dette system?

Eleverne arbejder som i første og anden fase i grupper. De præsenterer gruppe for gruppe deres arbejde, hvor tilhørergruppernes rolle er at stille kritiske spørgsmål.

Læreren: Læreren sammenfatter elevernes løsninger og kritiske indvendinger, samt styrer diskussionen om de forskellige løsninger. Læreren er djævlens advokat, hvis argumenterne er for letkøbte. Som afslutning på denne fase samler læreren op på forløbet indtil nu. Hvis hele forløbet afsluttes med fase 5, foretager læreren også den endelige konklusion og afrunding, og bringer læringsudbyttet i relation til de institutionelle læringsmål for eleverne.

Har man begrænset tid, kan man fint afslutte her. Ideer til videre arbejde er angivet nedenfor med en eventuel forlængelse (sjette fase), tjekspørgsmål samt ideer til videre forløb. Her kan opgaverne indgå på forskellig vis. En eventuel sjette fase fungerer som tjekspørgsmål, og tjekspørgsmålene kan udfoldes til forløb.

Sjette fase (evt.)

Har man stadig mod på at tælle nummerplader, kan man tælle videre:

- Hvor mange knallerter (store eller små) kan det lade sig gøre at registrere?
- En person har genkendt en bil på gul nummerplade og har set at tredje ciffer er enten 3 eller 8, næstsidste ciffer er 1 og sidste ciffer er 5, 6 eller 8. Hvor mange nummerplader kan passe på det personen har set?

Tjekspørgsmål til de opstillede læringsmål

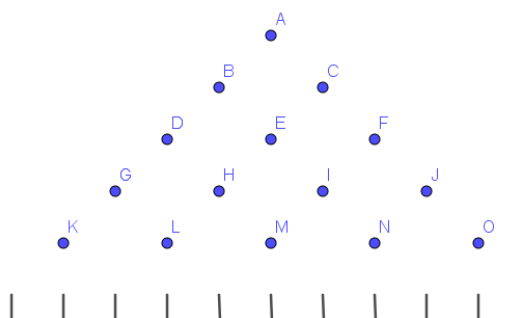
- En restaurant tilbyder 3 forretter, 5 hovedretter, en ostetallerken og 3 desserter, som kan bestilles à la carte. Restauranten sammensætter også menuer bestående af en hovedret sammen med enten en forret eller en dessert eller ostetallerkenen. Endeligt kan man vælge firerettens menu med forret, hovedret, ostetallerken og dessert. Hvor mange menuer kan restauranten tilbyde?
- En frugtkurv indeholder to bananer, et æble, en appelsin og en blomme. Man må tage to stykker frugt. På hvor mange måder kan det gøres, idet man anser de to bananer for at være ens.

Idéer til videre forløb

De videre forløb kan foldes mere ud end antydnet her. De kan også pakkes ned til lærerpræsentationer. De første to, der handler om binomialkoefficienter, kan behandles meget elegant i et senere forløb med nogle af metoderne, der bliver præsenteret på niveau 2. Den tredje opgave har givet anledning til mange diskussioner i forskellige fora, og med den rigtige analyse løses den ret enkelt. Se eksempelvis:

<http://www.math.ku.dk/uddannelser/laes/vidstedu/montyhall/>. Løsningen kræver dog et vist matematisk begrebsapparat. Som opgaven er stillet (og stilladseret) her, kan problemet løses med begrænsede forudsætninger. Dette viser også, at tælling er et redskab, der kan bruges slagkraftigt. Hvis man har behandlet sømbræts opgaven, kan man henvise til den, idet det er samme grundlæggende ide (fordeling som resultat af en tælling), der anvendes. På niveau 2 og 3 udfoldes dette tema yderligere.

- $(a + b)^2$ er som bekendt det samme som $(a + b) \cdot (a + b)$ og kan udregnes til $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Begrund at koefficienterne er 1, 2, 1. Hvad er koefficienterne til leddene, når man udregner $(a + b)^3$?
- På et sømbræt, som det, der er vist på figuren, lader man kugler trille ned mod bunden af brættet, således at de rammer søm A, triller til den ene side og rammer enten B eller C. Lader man 4 kugler trille lige ned mod A, hvor mange vil så trille videre og ramme hhv. B og C? Hvor mange vil ramme hhv. D, E og F? Hvor mange kugler skal man trille for at få en ide om fordelingen af kugler, der rammer hhv. D, H, I og J? Samme spørgsmål til næste række. Hvordan er fordeling af kugler i kasserne under sømbrættet?



- I et amerikansk quiz-program får vinderen en chance for yderligere at vinde en bil. I studiet er der en garage med tre døre, hvor der bag den ene dør er en bil. Bag de to andre er der en ged.

Deltageren vælger nu en dør, hvorefter værten åbner en af de andre døre og viser en ged. Værten spørger nu, om deltageren vil holde fast ved den valgte dør, eller om han vil skifte til den tredje dør. Hvad skal deltageren vælge? Skal han holde fast i sit oprindelige valg, eller skal han skifte valg af dør? Er det lige meget, om han holder fast ved sit valg eller vælger ny dør? Start diskussionen i klassen.

Hvis vi tager man lader 180 personer deltage i bil eller ged, kan vi løse gåden ved at tælle, hvor ofte man vil vinde bilen, hvis man fastholder valg af låg, og hvor ofte man vinder hvis man skifter strategi. Opstil et tælletræ eller anden diagram på baggrund af spørgsmålene:

- a. I hvor mange af tilfældene vil bilen være bag hhv. låge A, låge B og låge C?
- b. For hver af disse, I hvor mange tilfælde vil deltageren vælge hhv. låge A, låge B og låge C?
- c. Hvilke muligheder har studieværten for at vælge en låge med en tom boks, og hvordan vil fordelingen være?
- d. I hvor mange tilfælde vil man vinde, hvis man vælger beholdestrategien?
- e. I hvor mange tilfælde vil man vinde, hvis man vælger skiftestrategien?